Tema 2
ESPACIOS VECTORIALES

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

1 Espacio vectorial

Definición 1.1 *Un espacio vectorial es una terna* $(V, +, \cdot)$, *donde* V *es un conjunto no vacío y* $+, \cdot$ *son dos operaciones del tipo* $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ *a las que llamaremos 'suma de vectores' y 'producto por escalares respectivamente y con las siguientes propiedades: denotando* $+(u, v) = u + v$ *y* $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$,

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ *(asociativa).*
2. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ *(conmutativa).*
3. *Existe* $e \in V$ *tal que* $e + v = v + e = v$, $\forall v \in V$ *(elemento neutro).*
4. *Para cada* $v \in V$ *existe* w *tal que* $v + w = w + v = e$ *(elemento opuesto).*
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(seudo-asociativa).*
6. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ *y* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall u, v \in V$ *y* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(distributiva).*
7. $1v = v$,$\forall v \in V$ *(unimodular).*

De forma abreviada diremos que V *es un espacio vectorial. A los elementos de* V *lo llamamos vectores y a los de* $\mathbb{R}$, *escalares.*

Proposición 1.2 1. *El elemento neutro es único. Se denotará por* 0.

2. *El elemento opuesto de un vector es único. Si* v *es un vector, su opuesto lo denotamos por* $-v$.

Proposición 1.3 *En un espacio vectorial se tiene las siguientes propiedades:*

1. $\lambda 0 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $0v = 0$, $v \in V$.
3. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$, $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.
4. *Si* $n \in \mathbb{N}$, $nv = v + \ldots + v$.
5. *Si* $\lambda v = 0$, *entonces* $\lambda = 0$ *o* $v = 0$.
6. *Si* $\lambda u = \lambda v$ *y* $\lambda \neq 0$, *entonces* $u = v$.
7. *Si* $\lambda v = \mu v$ *y* $v \neq 0$, *entonces* $\lambda = \mu$.

2 Subespacio vectorial

Definición 2.1 *Sea* V *un espacio vectorial y* U *un subconjunto suyo. Se dice que* U *es un subespacio vectorial de* V *si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si* $u, v \in U$, *entonces* $u + v \in U$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in U$, *entonces* $\lambda u \in U$.
3. *Con la suma y producto por escalares de* V, U *es un espacio vectorial.*

Proposición 2.2 *Sea* U *un subconjunto de un espacio vectorial* V. *Entonces* U *es un subespacio vectorial si y sólo si*

1. *Si* $u, v \in U$, *entonces* $u + v \in U$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in U$, *entonces* $\lambda u \in U$.

Proposición 2.3

1. *Si* V *es un espacio vectorial,* $\{0\}$ *y* V *son subespacios vectoriales.*
2. *Si* $U \subset V$ *es un subespacio vectorial, el elemento neutro de* U *y el de* V *coinciden.*

3. *Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial, $u \in U$, entonces el elemento opuesto de u en V y en U coinciden.*

4. *Si U y W son subespacios vectoriales, entonces $U \cap W$ también es subespacio vectorial.*

5. *Si U y W son subespacios vectoriales de V y $U \subset W$, entonces U es un subespacio vectorial de W.*

Definición 2.4 *Sean U y W subespacios vectoriales de V. Se define la suma de U con W como el conjunto*

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}.$$

Entonces $U+W$ es un subespacio vectorial. Además se tienen las siguientes propiedades:

1. $U + W = W + U$.

2. $U + U = U$.

3. $U \subset U + W$.

4. *$U + W$ es el menor subespacio (con respecto a la inclusión de conjuntos) que contiene a U y a W.*

Definición 2.5 *Sean U y W subespacios vectoriales de V. Se dice que V es suma directa de U y W si:*

1. $V = U + W$.

2. $U \cap W = \{0\}$.

Se denotará por $V = U \oplus W$.

3 Sistema de generadores. Dependencia lineal

Definición 3.1 *Sean $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Una combinación lineal de X es una suma del tipo*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Se llama subespacio vectorial generados por X al conjunto de combinaciones lineales:

$$< X >=< v_1, \ldots, v_n >= L(X) = L(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i; \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Proposición 3.2 *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$< X >$ es un subespacio vectorial. Si el cardinal de X es 1, se dice que $< v >$ es la recta vectorial generada por v.*
2. *Si $X \subset U$, donde U es un subespacio vectorial, entonces $< X >\subset U$.*
3. *Si $X \subset Y$, entonces $< X >\subset< Y >$.*
4. *Si $X, Y \subset V$, entonces $< X \cup Y >\subset< X > + < Y >$.*

Definición 3.3 *Un espacio vectorial V se llama finitamente generado si existe un conjunto finito de vectores X tal que $< X >= V$. A X se llama un sistema de generadores de V.*

Proposición 3.4

1. *Si X es un sistema de generadores y $X \subset Y$, entonces Y también es un sistema de generadores.*
2. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores y v_1 es combinación lineal de los demás, entonces $\{v_2, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de V.*
3. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores y $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_1 \neq 0$. Entonces $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de V.*
4. *Un subespacio vectorial de un espacio vectorial finitamente generado, también es finitamente generado.*

Definición 3.5 *Un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ se dice que es linealmente independiente (o que forman un conjunto de vectores libre) si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial. De otra forma:*

$$\text{si } \sum_{i=1} \lambda_i v_i = 0, \text{ entonces } \lambda_i = 0 \text{ para cada } i.$$

Un conjunto de vectores que no es linealmente independiente se llama linealmente dependiente.

Proposición 3.6

1. *$\{v\}$ es linealmente independiente si y y sólo si es no nulo.*
2. *Dos vectores son linealmente independientes si no son proporcionales.*
3. *Si $X \subset Y$ e Y es linealmente independiente, entonces X es linealmente independiente.*
4. *Si en un conjunto X hay un vector que es combinación lineal de los demás, entonces X es linealmente dependiente.*
5. *Si $0 \in X$, entonces X es linealmente dependiente.*

Definición 3.7 *Una base de un espacio vectorial es un sistema de generadores que es linealmente independiente.*

Teorema 3.8 *Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *B es base de V.*
2. *Para cada $v \in V$, existen únicos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.*

Definición 3.9 *Sea B una base de un espacio vectorial. Se llaman coordenadas de un vector v a la n-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.*

A partir de ahora vamos a demostrar que en un espacio vectorial dado, el cardinal de las bases de dicho espacio es siempre el mismo.

Lema 3.10 *Sean X e Y dos conjuntos finitos de un espacio vectorial, tales que $X \subset Y$, X es linealmente independiente e Y es un sistema de generadores. Entonces existe una base B de V tal que $X \subset B \subset Y$.*

Corolario 3.11 *Si v es un vector no nulo, v pertenece a una base.*

Corolario 3.12 (completación) *Dado un conjunto de vectores linealmente independientes, siempre es posible añadir vectores hasta tener una base.*

Corolario 3.13 *En todo sistema de generadores, existe un subconjunto suyo que es base.*

Lema 3.14 *Sea* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de un espacio vectorial. Sea* $v \in V$ *y* $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. *Si* $\lambda_1 \neq 0$, *entonces* $\{v, e_2, \ldots, e_n\}$ *es una base de* V.

Teorema 3.15 (de la base) *Sea* V *un espacio vectorial finitamente generado. Entonces todas las bases de* V *tienen el mismo cardinal.*

A ese cardinal se llamará la dimensión de V, *denotándola por* $dim(V)$.

Corolario 3.16 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n *y* $X = \{e_1, \ldots, e_m\} \subset V$.

1. *Si* X *es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces* $m \leq n$. *Además se da la igualdad si* X *es base.*
2. *Si* X *es un sistema de generadores de* V, *entonces* $m \geq n$. *Además se da la igualdad si* X *es base.*

Corolario 3.17 *Si* U *es un subespacio vectorial de un espacio vectorial* V, *entonces* $dim(U) \leq dim(V)$ *y la igualdad se tiene si y sólamente* $U = V$.

Corolario 3.18 *Sean* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces*

1. $dim(< e_1, \ldots, e_m >) = r(A)$, $A = (e_1 \ \ldots \ e_m)$.
2. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *es base de* $\mathbb{R}^n$ *si y sólamente si* $det(A) \neq 0$.

Corolario 3.19 *Sea un subespacio vectorial* U *de* $\mathbb{R}^n$ *dado por*

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

Entonces $dim(U) = n - r(A)$.

Teorema 3.20 *Sea* U *y* W *subespacios vectoriales de* V. *Entonces:*

1. *Si* B_1 *es base de* U *y* B_2 *es base de* W, *entonces* $B_1 \cup B_2$ *es un sistema de generadores de* $U + W$.
2. $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

3. *Si* $V = U \oplus W$, *entonces* $dim(V) = dim(U) + dim(W)$.

4. *Sean* B_1 *y* B_2 *bases de* U *y* W *respectivamente. Entonces son equivalentes:*

   (a) $V = U \oplus W$.

   (b) $B_1 \cup B_2$ *es base de* V.