Tema 3:

MATRICES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Matrices

Definición 1.1 *Una matriz de m filas y n columnas es una caja de nm números a_{ij}, donde a_{ij} está en la fila i-ésima y columa j-ésima. Notaremos $A = (a_{ij})$. Dos matrices A y B con el mismo número de filas y de columnas, son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$, para cada i, j. Al conjunto de matrices $m \times n$ se denotará por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la suma de A y B y el producto de λ por A como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Proposición 1.2 *$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión mn.*

Demostración: Una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es $\{E_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, donde el elemento kl es

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

q.e.d

Definición 1.3 *Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$ se define el producto de A por B como la matriz $AB \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$ definida por*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Proposición 1.4 *Se tiene las siguientes propiedades del producto de matrices:*

1. $A(B + C) = AB + AC)$, $(A + B)C = AC + BC$.
2. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
3. $A(BC) = (AB)C$.

4. $I_m A = AI_n = A$, *con* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *e* I_n *es la matriz identidad de orden* n.

Definición 1.5 *Una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *se dice que es regular (o inversible o no degenerada) si existe* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $AB = I_n$. *A la matriz* B *la denotamos por* A^{-1} *y se llama la matriz inversa de* A.

Proposición 1.6 *Denotamos* $Gl(n,\mathbb{R})$ *el conjunto de las matrices regulares de orden* n. *Se tiene las siguientes propiedades:*

1. *La matriz identidad es regular y su inversa es ella misma.*
2. *Si* A *y* B *son regulares, entonces* AB *es regular y su inversa es* $B^{-1}A^{-1}$.
3. *Si* A *es regular,* A^{-1} *también es regular y su inversa es* A.
4. *Si* A *es regular y* $\lambda \neq 0$, *entonces* λA *es regular y su inversa es* $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

2 Matrices y aplicaciones lineales

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente. Se consideran $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matriz definida por

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i.$$

Definición 2.1 *La matriz* A *se llama la expresión matricial de* f *respecto de las bases* B *y* B' *y se denotará por* $M(f, B, B')$.

Si $v \in V$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $f(v)$ tiene como coordenadas

$$M(f, B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.2 *1.* $M(0, B, B') = 0$.

2. $M(1_V, B, B) = I_n$.

3. $M(f + g, B, B') = M(f, B, B') + M(g, B, B')$. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $M(\lambda f, B, B') = \lambda M(f, B, B')$.

4. *Si* $f : V \to V'$ *y* $g : V' \to V''$ *son dos aplicaciones lineales, entonces* $M(g \circ f, B, B'') = M(g, B', B'')M(f, B, B')$. *Si* $f : V \to V'$ *es un isomorfismo, entonces* $M(f^{-1}, B', B) = M(f, B, B')^{-1}$.

Corolario 2.3 *Sean* V *y* V' *dos espacios vectoriales y* B *y* B' *sendas bases. La aplicación* $\Phi : L(V^n, V'^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *definida por*

$$\Phi(f) = M(f, B, B'),$$

es un isomorfismo.

Corolario 2.4 *Sea* $f : V \to V'$ *una aplicación ilneal y* B *y* B' *bases de* V *y* V' *respectivamente. Entonces* f *es un isomorfismo si y sólo si* $M(f, B, B')$ *es una matriz regular.*

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ bases de dicho espacio. Si $v \in V$, sean $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x'_1, \ldots, x'_n)$ las coordenadas de v respecto de B y B'. Si

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$$

entonces

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M(1_V, B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.5 *Sea B una base de un espacio vectorial y $A \in Gl(n, \mathbb{R})$. Entonces*

1. *Existe una base B' tal que $A = M(1_V, B, B')$.*
2. *Existe una base B'' tal que $A = M(1_V, B'', B)$.*

Como consecuencia de la proposición 2.2, se tiene:

Corolario 2.6 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, B_1, B_2 y B'_1, B'_2 bases de V y V' respectivamente. Entonces*

$$M(f, B_1, B'_1) = M(1_{V'}, B'_2, B_2)M(f, B_2, B'_2)M(1_V, B_1, B_2).$$

Definición 2.7 *Dos matrices A y C de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son equivalentes si existen matrices $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ y $Q \in Gl(m, \mathbb{R})$ tales que*

$$A = QCP.$$

Corolario 2.8 *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo, B y B' bases de V. Entonces*

$$M(f, B, B') = M(1_V, B', B)M(f, B', B')M(1_V, B, B').$$

Definición 2.9 *Dos matrices A y C de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son semejantes si existe una matriz regular $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que*

$$A = P^{-1}CP.$$

Proposición 2.10

1. *Dos matrices equivalentes son expresiones matriciales de una misma aplicación lineal.*
2. *Dos matrices semejantes son expresiones matriciales del mismo endomorfismo.*

Se estudia ahora cuándo dos matrices son equivalentes, introduciendo el concepto del rango de una matriz. Previamente, se tiene:

Proposición 2.11 *Sea V un espacio vectorial y B una base suya. Sea $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores. Consideramos*

$$X' = \{(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})\}$$

el conjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por las coordenadas de los vectores de X respecto de la base B. Entonces X es linealmente independiente (resp. sistema generador, base) si y sólo si X' es linealmente independiente (resp. sistema generador, base).

Definición 2.12 *Se llama rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al número máximo de columnas linealmente independientes, considerándolos como vectores de $\mathbb{R}^m$.*

Proposición 2.13 *El rango de una matriz coincide con el rango de una aplicación lineal que la tenga como expresión matricial.*

Proposición 2.14 *Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, existen bases B y B' de V y V' respectivamente tales que*

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde r es el rango de f.

Corolario 2.15 *Toda matriz de rango r es equivalente a una del tipo*

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corolario 2.16 *Dos matrices son equivalentes si y sólo tienen el mismo rango.*

Definición 2.17 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama traspuesta de de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, donde su elemento ij es el elemento ji de A.*

Corolario 2.18 *El rango de una matriz coincide con el rango de su matriz traspuesta.*

Proposición 2.19

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Definición 2.20 *Una matriz cuadrada se llama simétrica (resp. antisimétrica) si coincide con su matriz traspuesta (resp. la opuesta de su matriz traspuesta). Se denota $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ y $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices simétricas y antisimétricas respectivamente.*

Proposición 2.21 *Los conjuntos $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ y $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de dimensiones $\frac{n(n+1)}{2}$ y $\frac{n(n-1)}{2}$ respectivamente. Además,*

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Por último, como propiedades del rango de una matriz se tiene:

Corolario 2.22 *El rango de una matriz no varía si*

1. *una fila (o columna) se sustituye por un múltiplo no nula de ella.*
2. *una fila (o columna) se sustituye por ella y una combinación lineal de las demás.*
3. *Una fila (o columna) es cero.*
4. *Se cambia el orden de las filas (o columnas).*
5. *se elimina una fila (o columna) que es combinación lineal de las demás.*

3 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.1 *Un sistema de ecuaciones lineales, con* m *ecuaciones y* n *incógnitas* $x_1, \ldots, x_n$ *a un sistema de ecuaciones del tipo*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \ldots &\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. *A* $b_1, \ldots, b_m$ *se llaman términos independientes*

Se puede escribir también como

$$AX = b,$$

con

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definición 3.2 *Un sistema de ecuaciones lineales se llama compatible si tiene solución, es decir, existe* X *tal que* $AX = b$. *En caso contrario, se dice que el sistema es incompatible. Si un sistema compatible tiene una única solución, se dice que es compatible determinado. Si tiene más de una solución, se dice que es compatible indeterminado.*

Proposición 3.3 *Si* X_0 *es una solución de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el conjunto de soluciones es*

$$\mathcal{S} = X_0 + Ker(A) = \{X_0 + v; v \in Ker(A)\}.$$

En particular, un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

Corolario 3.4 *Uns sistema compatible es determinado si y sólo si el rango de* A *es* n.

Teorema 3.5 *Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones lineales. Sea $(A|b) \in \mathcal{M}_{m(n+1)}(\mathbb{R})$ la matriz formada por la matriz A a la que se ha añadido una columna más formada por la matriz b de términos independientes. Entonces el sistema es compatible si y sólo si el rango de A es el rango de $A|b$.*

Corolario 3.6 *Un sistema homogéneo ($b = 0$) es compatible. Además, es determinado si y sólo si el rango de A es n.*

4 Determinantes

Definición 4.1 *La definición del determinante de una matriz cuadrada se hace por recurrencia. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si $n = 1$, se define el determinante de A como a_{11}. Si $n = 2$,*

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si $n > 2$, se toma una fila cualquiera, por ejemplo, la fila i-ésima; entonces

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij},$$

donde A_{1j} es el determinante de la matriz cuadrada de ordeen $(n-1)$ que resulta de eliminar de la matriz A la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Proposición 4.2 *Se tienen las siguientes propiedades de los determinantes:*

1. $det(0) = 0$, $det(I_n) = 1$.
2. $det(A^t) = det(A)$.
3. *A es una matriz regular si y sólo si $det(A) \neq 0$.*
4. $det(AB) = det(A)det(B)$.
5. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

6. *$det(A^{-1}) = 1/det(A)$, si A es regular.*

También se tiene

Proposición 4.3

1. *El determinante es nulo si dos filas son iguales, o si una es combinación de las demás.*
2. *Si se cambia dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo.*
3. *Si una fila se multiplica por un número λ, el determinante se multiplica por λ.*

Teorema 4.4 *El rango de una matriz es el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo. Más concretamente, para el estudio del rango de una matriz, si un menor es no nulo, basta con añadir filas y columna a este menor.*

Definición 4.5 *Dada una matriz cuadrada A, se llama adjunto de a_{ij}, y lo denotamos por Δ_{ij}, al $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz que resulta de quitar la fila y columna donde se encuentra el elemento (i,j). Se llama matriz adjunta de A a la matriz $A^* = (\Delta_{ij})$.*

La matriz adjunta tiene como propiedad que $(A^t)^* = (A^*)^t$. Como consecuencia, se tiene

Corolario 4.6

1. *Si A es una matriz regular,*
$$A^{-1} = \frac{(A^*)^{-1}}{det(A)}.$$
2. *Si $AX = b$ es un sistema compatible determinado de n ecuaciones y n incógnitas, entonces cada solución x_i es*
$$x_i = \frac{det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)},$$

donde se ha colocado en la i-ésima columna de la matriz A, la columna de términos independientes.