Tema 8:

APLICACIONES AFINES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Aplicaciones afines

Lema 1.1 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación con la propiedad de que existe $P \in V$ tal que la aplicación $\overrightarrow{f_P} : V \to V$ definida por*

$$\overrightarrow{f_P}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}$$

es lineal. Entonces $\overrightarrow{f_P} = \overrightarrow{f_Q}$ para cada $Q \in V$.

Definición 1.2 *Una aplicación $f : V \to V'$ se llama afín si la aplicación $\overrightarrow{f_P}$ es lineal. A la aplicación $\overrightarrow{f_P} = \overrightarrow{f}$ se llama la aplicación lineal asociada a f.*

Proposición 1.3 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación afín. Entonces*

1. $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.
2. $f(X) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PX})$.

Proposición 1.4 *Sea $F : V \to V'$ una aplicación lineal, $P_0 \in V$ y $P_0' \in V'$. Entonces existe una única aplicación afín $f : V \to V'$ con la propiedad de que $f(P_0) = P_0'$ y cuya aplicación lineal asociada es F.*

Como ejemplos de aplicaciones afines tenemos:

1. Las aplicaciones lineales.
2. Las únicas aplicaciones afines que son lineales son aquellas que llevan elemento neutro en el neutro.
3. Las aplicaciones constantes.
4. Las traslaciones: $t_v(X) = X + v$.
5. Las homotecias: $h_{a,\lambda}(X) = a + \lambda\overrightarrow{aX}$ ($\lambda \neq 0, 1$, $a \in V$).

6. Las aplicaciones afines $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ son de la forma $f(X) = AX + b$.

Proposición 1.5 (Traslaciones)
1. *Una traslación es biyectiva y* $(t_v)^{-1} = t_{-v}$.
2. *La composición de traslaciones es otra traslación.*
3. *El conjunto de traslaciones de un espacio afín es un grupo (con la composición).*
4. *La única traslación que tiene puntos fijos es la identidad.*
5. *Una traslación viene determinada por la imagen de un único punto.*

Proposición 1.6 (Homotecias)
1. *Una homnotecia es biyectiva y* $(h_{a,\lambda})^{-1} = h_{a,1/\lambda}$.
2. *La composición de homotecias es otra homotecia. Además,* $h_{a,\lambda} \circ h_{a,\mu} = h_{a,\lambda\mu}$.
3. *El conjunto de homotecias de centro* a*, junto con la identidad, es un grupo (con la composición).*
4. *El único punto fijo de una homotecia es su centro.*
5. *Una homotecia viene determinada por la imagen de dos puntos.*

2 Propiedades de las aplicaciones afines

Proposición 2.1
1. *La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín y la aplicación lineal asociada a la composición es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.*
2. *La suma de aplicaciones lineales y el producto por escalares son aplicaciones afines.*

Proposición 2.2 (subespacios afines) *Se considera una aplicación afín $f : V \to V'$. Entonces*

1. *Si S es un subespacio afín de V, entonces $f(S)$ lo es de V' y $\overrightarrow{f(S)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{S})$.*
2. *Si S' es un subespacio afín de V', entonces $f^{-1}(S')$ lo es de V y $\overrightarrow{f^{-1}(S')} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{S'})$.*
3. *Si S y T son subespacios de V y S es paralelo a T, entonces $f(S)$ es paralelo a $f(T)$.*
4. *Si S y T son subespacios paralelos de V, $f(S)$ y $f(T)$ son subspacios paralelos.*
5. *$f(< \{P_0, \ldots, P_m\} >) =< \{f(P_0, \ldots, f(P_m)\} >$.*
6. *Si P, Q, R son tres puntos alineados de V, entonces $f(P), f(Q), f(R)$ son puntos alineados.*

Proposición 2.3 *Si $f : V \to V'$ es una aplicación afín, el conjunto de puntos fijos de f, es decir,*

$$S = \{X \in V; f(X) = X\}$$

es un subespacio afín (si no es vacío). Además $\overrightarrow{S} = Ker(\overrightarrow{f} - 1_V)$.

Teorema 2.4 *Sea $f : V \to V$ una traslación o una homotecia. Entonces si S es un subespacio de V, $f(S)$ y S son subespacios paralelos. Recíprocamente, las únicas aplicaciones afines de un espacio afín en sí mismo con dicha propiedad, son las traslaciones y homotecias.*

Proposición 2.5 *Una aplicación afín es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y sólamente si su aplicación lineal asociada es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

Definición 2.6 *Una afinidad es una aplicación afín biyectiva. El conjunto de afinidades es un grupo (con la composición).*

Si el espacio afín es $\mathbb{R}^n$ y $f(X) = AX + b$, entonces f es afinidad si y sólo si el determinante de A no es cero.

3 Proyecciones y simetrías

Recordamos que si S y T son subespacios afines de un espacio afín V, se dice que V es suma directa de S y T, y lo denotamos por $V = S \oplus T$ si $V = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$, o lo que es lo mismo, si $V = S + T$ y la intersección de S y T es un punto.

Definición 3.1 *Supongamos que $V = S \oplus T$.*

1. *Se llama proyección sobre S paralela a $\overrightarrow{T}$ a la aplicación $\pi_S : V \to V$ definida por*
$$\pi_S(X) = S \cap T(X),$$
donde $T(X)$ es el subspacio $T(X) = X + \overrightarrow{T}$.

2. *Se llama simetría respecto de S y paralela a $\overrightarrow{T}$ a la aplicación $\sigma_S : V \to V$ definida por*
$$\sigma_S(X) = X + 2\overrightarrow{X\pi_S(X)} = X + 2(\pi_S(X) - X).$$

Proposición 3.2 *Se tienen las siguientes propiedades sobre las proyecciones.*

1. *La aplicación lineal asociada es una proyección vectorial.*
2. $\pi \circ \pi = \pi$.
3. $\pi(X) = X$ *si y sólo si* $X \in S$.
4. $Im(\pi) = S$.

Proposición 3.3 *Se tienen las siguientes propiedades sobre las simetrías.*

1. *La aplicación lineal asociada es una simetría vectorial.*
2. $\sigma \circ \sigma = 1_V$.
3. $\sigma(X) = X$ *si y sólo si* $X \in S$.
4. *Una simetría es una afinidad y su inversa es ella misma.*

Caracterizamos las proyecciones y simetrías atendiendo a la segunda propiedad.

Teorema 3.4 *Sea $f : V \to V$ una aplicación afín. Si $f \circ f = f$ (resp. $f \circ f = 1_V$), entonces f es una proyección (resp. simetría).*

Estudiamos las proyecciones y simetrías en $\mathbb{R}^n$. Sea $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum a_i x_i + b = 0\}$ un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{T} =< (v_1, \ldots, v_n) >$ una recta vectorial. Entonces

$$\pi_S(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1 - \frac{\sum a_i x_i + b}{\sum a_i v_i} v_1, \ldots, x_n - \frac{\sum a_i x_i + b}{\sum a_i v_i} v_n \right).$$

$$\sigma_H(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1 - 2\frac{\sum a_i x_i + b}{\sum_i a_i v_i} v_1, \ldots, x_n - 2\frac{\sum a_i x_i + b}{\sum a_i v_i} v_n \right).$$

Se considera ahora una recta afín $L = c+ < v >$ y un hiperplano vectorial $\overrightarrow{H} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum a_i x_i = 0\}$. Ahora tenemos

$$\pi_L(x_1, \ldots, x_n) = \left(c_1 + \frac{\sum a_i (x_i - c_i)}{\sum a_i v_i} v_1, \ldots, c_n + \frac{\sum a_i (x_i - c_i)}{\sum a_i v_i} v_n \right).$$

$$\sigma_L(x_1, \ldots, x_n) = \left(-x_1 + 2c_1 + 2\frac{\sum a_i (x_i - c_i)}{\sum a_i v_i} v_1, \ldots, -x_n + 2c_n + 2\frac{\sum a_i (x_i - c_i)}{\sum a_i v_i} v_n \right).$$

Definición 3.5 *Dado $P \imath V$, se llama simetría central respecto de P a la afinidad $\sigma_P(X) = X - 2\overrightarrow{PX} = 2P - X$.*

