GEOMETRÍA II. Examen de junio
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2014/15

Nombre:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa

   (a) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Entonces f es diagonalizable.

   (b) En un espacio métrico no degenerado, dos vectores ortogonales y no nulos son linealmente independientes.

   (c) La composición de dos simetrías ortogonales es una simetría ortogonal.

2. Sea $(\mathbb{R}^3, g)$ con $\sigma(g) = (2,1)$ y $B = \{(1,1,1),(1,1,2),(-2,-1,-1)\}$ es una base conjugada. Hallar una base de $U^\perp$ donde $U = \{(x,y,z) : x - y + z = 0, x + z = 0\}$.

3. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (-3x+2z, -x-y+z, -x)$. Estudiar si es diagonalizable. Para el valor $a \in \mathbb{R}$ que hace que f sea autoadjunto de $(\mathbb{R}^3, g)$ donde

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & a \end{pmatrix},$$

   hallar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$ donde diagonaliza f.

4. Si $U = \{(x,y,z) : x - y + z = 0, 2x - 2y - z = 0\}$, hallar $M(f, B_u)$, donde f es la simetría axial respecto de U para la métrica

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. (a) Como $r(f) = 1$, entonces $\dim(Ker(f)) = 2 - 1 = 1$, luego $\lambda = 0$ es un valor propio y $dim(V_0) = 1$. Si $B = \{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ donde e_1 general el núcleo, entonces $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $-\lambda(b-\lambda)$. Si $b \neq 0$, entonces hay dos valores propios y es diagonalizable. Pero si $b = 0$, $\lambda = 0$ tiene multiplicidad aritmética 2, que no coincide con la geométrica, que es 1. Por tanto, la respuesta es falsa y basta tomar un endomofirmo f cuya expresión matricial respecto de una base B sea $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Si $v = \lambda u$ y u, v son ortogonales $g(u, v) = \lambda g(u, u) = 0$. Como $\lambda \neq 0$, entonces $g(u, u) = 0$. Luego basta con encontrar un espacio no degenerado y un vector que sea ortogonal así mismo. Por tanto, la respuesta es falsa y el ejemplo es el siguiente: sea el espacio de Lorentz-Minkowski de dimensión 2 (que no es degenerado), el vector $v = (1, 1)$ es ortogonal a sí mismo. Así, $\{v, 2v\}$ son ortogonales, pero son linealmente dependientes.

   (c) Falsa. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, una simetría respecto de una recta tiene determinante -1. Si componemos con otra, la composición tendría determinate el producto de los determiantes, es decir 1. Las únicas simetrías ortogonales de determinante 1 son la identidad y la simetría respecto del origen. Luego basta tomar dos simetrías ortogonales respecto de rectas cuya composición no sea ninguna de las dos anteriores: sea f la simetría respecto de $< (1, 0) >$ y g respecto de $< (1, 1) >$. Entonces $g \circ f(1, 0) = g(f(1, 0)) = g(1, 0) = (0, -1)$, que no es ni la identidad ni menos la identidad del vector $(1, 0)$.

2. Hallamos $M_{B_u}(g)$. Como la matriz $Q = M(1_V, B, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, entonces llamando $P = Q^{-1}$, tenemos

$$M_{B_u}(g) = P^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P.$$

Como

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una base de U es $\{(-1,0,1)\}$. Entonces $(x,y,z) \in U^\perp$ sii

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x - 2y + z.$$

Resolviendo, tenemos $U^\perp =< (-1,0,1), (2,1,0) >$.

(Otra manera de hacer el problema) Primero trabajamos respecto de B y al final, cambiamos a la base usual. Ya hemos visto que una base de U es $\{(1,0,-1)\}$. Este vector en coordenadas respecto de B es $(0,1,1)_B$. Si $(x,y,z)_B \in U^\perp$, entonces

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y - z.$$

Luego $U^\perp =< (1,0,0)_B, (0,1,1)_B >=< (1,1,1), (-1,0,1) >$.

3. La matriz $A = M(f, B_u)$ es

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$. Las raíces son -2 y -1 que es doble. Por tanto, es diagonalizables sii la multiplicidad geométrica de $\lambda = -1$ es 2. Pero

$$\dim(A + I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Esto prueba que f es diagonalizable.

El endomorfismo es autoadjunto si $A^tG = GA$, o lo que es lo mismo, si GA es simétrica, donde $G = M_{B_u}(g)$.

$$GA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 16-a & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Es simétrica sii $16-a=5$, es decir, $a=11$. Para encontrar la base ortonormal basta con hallar una base donde diagonaliza y de dicha base, obtener la ortonormal. Para $\lambda=2$, es suficiente con tomar un vector propio y dividir por su norma. Para $\lambda=-1$, usamos Gram-Schmidt. Hallamos bases de los subespacios propios: si $(x,y,z)\in V_{-2}$, entonces

$$0=(A+2I)X=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow -x+2z=0,-x+y+z=0\Rightarrow V_{-2}=<(2,1,1)>.$$

Para V_{-1}:

$$0=(A+I)X=\begin{pmatrix}-2&0&2\\-1&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow -x+z=0\Rightarrow V_{-1}=<(0,1,0),(1,1,1)>.$$

Sea $\{e_1=(2,1,1),e_2=(0,1,0),e_3=(1,1,1)\}$.

$$g(e_1,e_1)=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&2&-4\\-4&-4&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=1.$$

$$g(e_2,e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&2&-4\\-4&-4&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=2.$$

Llamamos $v=3=e_3+me_2$, de manera que $g(v_3,e_2)=0$.

$$0=g(v_3,e_2)=\begin{pmatrix}1&1+m&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&2&-4\\-4&-4&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-3+2(m+1)\Rightarrow m=1/2.$$

Por tanto $v_3=(1,3/2,1)$ y

$$g(v_3,v_3)=\begin{pmatrix}1&3/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&2&-4\\-4&-4&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3/2\\1\end{pmatrix}=1/2.$$

Luego una base ortonormal donde diagonaliza es $\{(2,1,1),(0,1,0)/\sqrt{2},(1,3/2,1)/\sqrt{1/2}\}$.

4. Tenemos $U =< (1,1,0) >$. Hallamos $U^{\perp}$ (parecido al ejercicio 2):

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x - 2y + z.$$

Entonces $U^{\perp} =< (1,0,-1),(2,1,0) >$. Respecto de $B = \{(1,0,-1),(2,1,0),(1,1,0)\}$, sabemos que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Finalmente, $M(f,B_u) = P^{-1}M(f,B)P$, donde $P = M(1_V, B_u, B)$. Sabemos que

$$P = M(1_V, B, B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

Por tanto

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$