TALLER Y ENCUENTRO

RED ESPAÑOLA DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO

Murcia, 8, 9 y 10 de Abril de 2019

COFINANCIADO POR:

RED ESPAÑOLA DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO

f SéNeCa(+)

ABSTRACTS DEL ENCUENTRO

El problema de Steklov en orbisuperficies

Teresa Arias Marco

Hoy en día es de gran relevancia el estudio del problema de Steklov (1902), en particular, por sus aplicaciones a la tomografía de impedancia eléctrica. Además, éste ha sido ampliamente estudiado sobre variedades riemannianas compactas con frontera. El objetivo de la charla será mostrar cómo la geometría y la topología de una orbisuperficie riemanniana con frontera se relaciona con el espectro de Steklov.

Universidad de Extremadura

Complete minimal submanifolds with nullity in space forms

Marcos Dajczer

(trabajo conjunto con Th. Kasioumis, A. Savas-Halilaj y Th. Vlachos)

Discutiré varios aspectos de la estructura geométrica de las subvariedades Riemannianas completas de rango dos en formas espaciales.

IMPA, Río de Janeiro

Superficies isoparamétricas en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Miguel Domínguez-Vázquez
(trabajo conjunto con José M. Manzano)

Una hipersuperficie de una variedad riemanniana se dice isoparamétrica si ella y sus hipersuperficies equidistantes próximas tienen curvatura media constante. A finales de los años 30, Cartan probó que una hipersuperficie en un espacio de curvatura constante es isoparamétrica si y solo si sus curvaturas principales son constantes. Sin embargo, esta caracterización deja de ser válida en variedades de curvatura no constante. A lo largo de las últimas décadas, el estudio de las hipersuperficies isoparamétricas se ha centrado en el problema de clasificación en las esferas redondas, así como en distintos tipos de espacios simétricos, y en su relación con otro tipo de subvariedades, como es el caso de las hipersuperficies homogéneas (aquellas que son órbitas de una acción de un grupo de isometrías).

En esta charla explicaré las ideas principales del artículo "M. Domínguez-Vázquez, J. M. Manzano: Isoparametric surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$-spaces, *arXiv:1803.06154v1*", en el que iniciamos el estudio de las superficies isoparamétricas, superficies con curvaturas principales constantes y superficies homogéneas en los espacios homogéneos de dimensión 3, obteniendo una clasificación completa de dichas hipersuperficies en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, es decir, en aquellos espacios homogéneos tridimensionales y simplemente conexos con grupo de isometrías de dimensión 4.

Universidad Autónoma de Madrid

Clasificación de esferas de Weingarten en espacios homogéneos

Pablo Mira

En esta charla haremos un recorrido por algunos teoremas de clasificación que hemos obtenido a lo largo de los últimos años, sobre esferas de Weingarten en espacios tridimensionales homogéneos. Esto es, sobre superficies compactas de género cero inmersas en dichos espacios homogéneos, y cuyas curvaturas principales κ_1, κ_2 cumplen una relación elíptica del tipo $W(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. En particular, explicaremos en qué casos podemos decir que dichas esferas de Weingarten son superficies de revolución.

Universidad Politécnica de Cartagena

Canonical metrics on holomorphic Courant algebroids

Roberto Rubio

The solution of the Calabi Conjecture by Yau implies that every Kähler Calabi-Yau manifold X admits a metric with holonomy contained in $\mathrm{SU}(n)$, and that these metrics are parametrized by the positive cone in $H^2(X,\mathbb{R})$. In joint work with M. García-Fernández, C. Shahbazi and C. Tipler we give evidence of an extension of Yau's theorem to non-Kähler manifolds, where X is replaced by a compact complex manifold with vanishing first Chern class endowed with certain holomorphic Courant algebroid Q. The equations that define the notion of *best metric* correspond to a mild generalization of the Hull-Strominger system, whereas the role of the second cohomology is played by an affine space of 'Aeppli classes' naturally associated to Q via secondary holomorphic characteristic classes introduced by Donaldson. In this talk, after a review of the Calabi Conjecture, I will introduce the notions of a holomorphic Courant algebroid and an 'Aeppli class' in order to then state and discuss our main results.

Universidad Autónoma de Barcelona

Superficies compactas embebidas de curvatura media constante en espacios producto

Francisco Torralbo

(trabajo conjunto con José M. Manzano)

Presentaremos la técnica de construcción conjugada de Plateau para la creación de superficies de curvatura media constante con ciertas simetrías prefijadas. Veremos cómo aplicar dicha técnica para construir superficies doblemente periódicas de curvatura media constante en los espacios producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dichas superficies tienen altura acotada y son invariantes por las simetrías de cierta teselación de $\mathbb{S}^2$ o $\mathbb{H}^2$ por polígonos regulares.

Como caso particular, construiremos superficies compactas y embebidas con curvatura media constante $H \leq 1/2$ de cualquier género en el producto riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Universidad de Granada

Conexión entre el FCM y el FCM$_\psi$

Francisco Viñado

Una variedad con densidad es una terna $(\overline{M}^{n+1}, g_{\overline{M}}, e^{\psi})$ constituida por una variedad de Riemann y una función peso $e^{\psi} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ utilizada para calcular volumenes pesados. En este tipo de variedades es posible definir un flujo geométrico asociado al funcional de área pesada n-dimensional como flujo análogo al flujo por la curvatura media (FCM) en la geometría de Riemann, este es el llamado flujo por la curvatura media asociado a una densidad (FCM$_\psi$). Este flujo deforma la hipersuperfice diferenciablemente reduciendo el área pesada n-dimensional de la hipersuperficie lo más rápidamente posible, dicho de otra forma, este flujo es el gradiente del funcional de área pesada n-dimensional. Mostraremos diferentes aspectos de la comprensión actual de este tipo de flujos y veremos la relación entre el FCM y FCM$_\psi$.

Universidad Jaume I

ABSTRACTS DEL TALLER DE JÓVENES INVESTIGADORES

Superficies con curvatura media predeterminada propiamente embebidas, con topología finita y un final en $\mathbb{R}^3$

Antonio Bueno
(trabajo conjunto con José A. Gálvez y Pablo Mira)

El objetivo de esta charla es el estudio de las superficies en $\mathbb{R}^3$ cuya curvatura media viene dada por una función predeterminada $\mathcal{H}$ en la 2-esfera unidad, dependiendo de la aplicación de Gauss. Concretamente, daremos estimaciones de altura para grafos y estudiaremos la no existencia de superficies propiamente embebidas, con topología finita y un final, bajo hipótesis necesarias sobre la función $\mathcal{H}$.

Universidad de Granada

Subvariedades espaciales de codimensión dos a través de una hipersuperficie nula

Verónica L. Cánovas
(trabajo conjunto con Luis J. Alías y Marco Rigoli)

Comenzamos estudiando subvariedades espaciales de codimensión dos que están contenidas en una hipersuperficie nula de un espaciotiempo arbitrario. Para estas variedades construimos una referencia normal globalmente definida y estudiamos su geometría en términos de esta referencia.

Tras esto, aplicamos lo obtenido al caso particular en el que el espacio ambiente es el conocido espaciotiempo de De Sitter, donde podemos codificar toda la geometría de la subvariedad en términos de una única función. Obtenemos también que, en el espaciotiempo de De Sitter, estas subvariedades son conformemente difeomorfas a la esfera, y esto nos permite deducir que el problema de caracterizar las subvariedades marginalmente atrapadas y compactas a través del cono de luz, es equivalente a resolver el problema de Yamabe en la esfera, obteniendo así nuestro principal resultado de clasificación.

Universidad de Murcia

New approximation results for minimal surfaces

Ildefonso Castro-Infantes
(trabajo conjunto con Brett Chenoweth)

It is well known that there exists a strong relation between minimal surfaces and complex analysis via the *Weierstrass Representation formula*. Therefore, it is natural to study what properties of the classical results in the fields of complex analysis may be generalized for minimal surfaces. In that sense, analogues to classical approximation theorem of Runge–Mergelyan and interpolation theorem of Weierstrass have been proved in the setting of minimal surfaces.

Other important result for holomorphic functions is *Carleman's approximation theorem (1927)*. It was the first result concerning approximation of continuous functions defined on an unbounded closed set of $\mathbb{C}$ by entire functions. The approximation in this result is stronger than uniform approximation as the error can be made as small as desired when approaching to infinity.

In this talk, we are going to show an analogue for this result in the setting of minimal surfaces. The solutions constructed will be complete and with any prescribed flux. Furthermore, they will be proper under natural (and necessary) assumptions.

Universidad de Granada

Una construcción de superficies mínimas con género 1 y curvatura total finita en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Jesús Castro-Infantes

En esta charla se pretenden construir superficies mínimas con curvatura total finita, k finales asintóticos a planos verticales, género 1 y además que sean simétricas respecto a k planos verticales en la variedad producto del plano hiperbólico por la recta real ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$), a estas superficies las llamamos k-noides. Para ello construimos una pieza fundamental de la superficie como superficie conjugada de un cierto grafo mínimo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y se extiende esta pieza por simetrías.

Universidad de Granada

El espacio de deformaciones para variedades no orientables

Juan Luis Durán

Dada una variedad tridimensional hiperbólica orientada completa y de volumen finito, es posible construir la variedad topológica mediante un número finito de tetraedros ideales con las caras identificadas por isometrías. Fijada una realización, el espacio de deformaciones viene dado por aquellas configuraciones de los tetraedros, que con el mismo patrón de pegado, dan lugar a una estructura hiperbólica en la variedad. Thurston demostró que el espacio de deformaciones de una variedad con n cúspides entorno a la estructura completa se identifica con un abierto de $\overline{\mathbb{C}}^n$.

En esta charla veremos cuál es el espacio de deformaciones para la variedad de Gieseking, un caso sencillo de variedad hiperbólica completa no orientable. Para estudiarlo, haremos uso de su cubierta doble orientable y las construcciones anteriores para variedades orientables. Veremos asimismo cómo se generalizan los resultados para el caso general no orientable.

Universidad Autónoma de Barcelona

Homogeneous conformally Einstein structures

Ixchel Gutiérrez-Rodríguez
(trabajo conjunto con E. Calviño Louzao, X. García-Martínez, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo)

A Riemannian manifold (M, g) is said to be *conformally Einstein* if there is an Einstein representative of the conformal class $[g]$. It was shown by Brinkmann [1] that the existence of a conformally Einstein structure is equivalent to the existence of solution of a (generically overdetermined) PDE. Despite its apparent simplicity, the integration of such equation is surprisingly difficult. This is due, in part, to the fact that the equation is trace-free and divergence-free.

While any two-dimensional manifold is conformally Einstein and three-dimensional manifolds are conformally Einstein if and only if they are conformally flat, there is still a lack of results in the four-dimensional case. There are partial answers in the Kähler situation [2] The classification of conformally Einstein product manifolds has been recently addressed [5]

The purpose of this lecture is to give a complete description of conformally Einstein homogeneous manifolds [3], which provides a natural generalization of previous work of Jensen [4].

References

[1] H. W. Brinkmann, *Riemann spaces conformal to Einstein spaces*, Math. Ann. **91** (1924), no. 3-4, 269–278.

[2] A. Derdziński, *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four*, Compositio Math. **49** (1983), no. 3, 405–433.

[3] E. Calviño Louzao, X. García-Martínez, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, and R. Vázquez-Lorenzo, *Conformally Einstein and Bach-flat four dimensional homogeneous manifolds*, To appear in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (2019).

[4] G. R. Jensen, *Homogeneous Einstein spaces of dimension four*, J. Differential Geometry **3** (1969), 309–349.

[5] W. Kühnel and H.-B. Rademacher, *Conformally Einstein product spaces*, Differential Geom. Appl. **49** (2016), 65–96.

Universidad de Santiago de Compostela

Sobre desigualdades de tipo Borell-Brascamp-Lieb

David Iglesias

(trabajo conjunto con Jesús Yepes Nicolás)

Si $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones medibles no negativas tales que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $h(x+y)$ es mayor o igual a la p-suma de $f(x)$ y $g(y)$, es decir,

$$h(x+y) \geq (f(x)^p + g(y)^p)^{1/p},$$

donde $-1/n \leq p \leq \infty$, $p \neq 0$, entonces la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb (B-B-L) asegura que la integral de h no es menor que la q-suma de las integrales de f y g, para $q = p/(np+1)$. Este resultado puede verse como la versión analítica de la famosa desigualdad de Brunn-Minkowski (B-M):

$$\mathrm{vol}(K+L)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(K)^{1/n} + \mathrm{vol}(L)^{1/n},$$

donde K, L son conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. De hecho, una prueba de la desigualdad de B-M consiste en aplicar la desigualdad de B-B-L a las funciones características $f = \chi_K$, $g = \chi_L$ y $h = \chi_{K+L}$.

Hoy en día existe un creciente interés por el estudio de versiones discretas de resultados continuos clásicos: el problema de las secciones de Bourgain, el teorema del elipsoide de John,... y por supuesto las relevantes desigualdades mencionadas anteriormente. En esta charla realizaremos una presentación de las desigualdades de B-M y de B-B-L, para después movernos al contexto discreto: las integrales (volumen) serán reemplazadas por una especie de cardinal con pesos, y nuestros conjuntos serán ahora subconjuntos finitos de puntos enteros. En este contexto presentaremos una nueva desigualdad discreta de tipo B-B-L.

Universidad de Murcia

A Calabi's Type Correspondence

Antonio Martínez-Triviño

Calabi observed that there is a natural correspondence between the solutions of the minimal surface equation in $\mathbb{R}^3$ with those of the maximal spacelike surface equation in $\mathbb{L}^3$. We are going to show how this correspondence can be extended to the family of φ-minimal graphs in $\mathbb{R}^3$ with φ-invariant under a two-parametric group of translations. We give also applications in the study and description of new examples.

Universidad de Granada

La Desigualdad de Brunn-Minkowski en Grupos de Lie Nilpotentes

Julián Pozuelo

Los grupos de Lie nilpotentes son espacios de medida que engloban a los grupos de Carnot, espacios de medida métricos cuya dimensión de Hausdorff es siempre mayor que la topológica. En este contexto existen varias maneras de generalizar la desigualdad de Brunn-Minkowski. Entre ellas, podemos sustituir la suma de Minkowski de conjuntos por el producto en el grupo y tomar como volumen la medida de Haar, obteniendo la desigualdad multiplicativa de Brunn-Minkowski.

En esta charla se presentará una prueba de la desigualdad multiplicativa de Brunn-Minkowski para grupos de Lie nilpotentes basada en la de Hadwiger-Ohmann de la desigualdad clásica de Brunn-Minkowski en el espacio Euclídeo, señalando la particular forma que ésta adquiere para grupos de Carnot.

Universidad de Granada

Isometrías en el espacio de Wasserstein de una esfera

Jaime Santos-Rodríguez

Dada una variedad Riemanniana (M, g) podemos considerar $\mathbb{P}_2(M)$ el espacio de medidas de probabilidad en M. Además podemos darle una métrica a $\mathbb{P}_2(M)$, la distancia L^2-Wasserstein, que viene dada en términos del transporte óptimo de masa. El considerar a este espacio ha resultado ser de gran utilidad pues la geometría de M y de $\mathbb{P}_2(M)$ están muy relacionadas. Por ejemplo, M tiene curvatura seccional no negativa si y solo si $\mathbb{P}_2(M)$ tiene curvatura seccional no negativa.

Dada una isometría $\varphi : M \to M$ podemos definir mediante pushforwards una isometría en $\mathbb{P}_2(M)$. Una pregunta natural es ver qué tanta simetría tiene $\mathbb{P}_2(M)$, es decir, qué tan grande puede ser su grupo de isometrías $Iso(\mathbb{P}_2(M))$.

En esta charla nos centraremos en el caso de la esfera $\mathbb{S}^n$, hablaremos sobre el transporte óptimo de medidas soportadas allí y y veremos que los grupos de isometrías de $\mathbb{S}^n$ y de $\mathbb{P}_2(\mathbb{S}^n)$ coinciden.

Universidad Autónoma de Madrid

Un nuevo modelo de comparación para variedades riemannianas y aplicaciones

Erik Sarrión

Para una variedad Riemanniana M, construimos un espacio modelo rotacionalmente simétrico de manera tal que el volumen de las esferas geodésicas de M y el volumen de las esferas geodésicas del espacio modelo son iguales. Esto nos da un método particular para comparar cantidades geométricas entre la variedad y su espacio modelo asociado que permite obtener estimaciones para el primer valor propio de Dirichlet del Laplaciano.

Universidad Jaume I

Raíces de polinomios geométricos

Miriam Tárraga
(trabajo conjunto con María A. Hernández Cifre y Jesús Yepes Nicolás)

Dados dos cuerpos convexos K, E en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \geq 0$, el volumen de la suma de Minkowski $K + \lambda E$ viene determinado por el polinomio de Steiner: $\mathrm{vol}(K + \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K; E)\lambda^i$. Los coeficientes $\mathrm{W}_i(K; E)$ son las denominadas quermassintegrales (relativas) de K respecto de E y, en el caso particular $E = B_n$ (la bola euclídea), involucran funcionales tales como el volumen, el área de superficie o la anchura media.

Si consideramos ahora el volumen de la suma radial $K \widetilde{+} \lambda E = \{x \widetilde{+} \lambda y : x \in K, y \in E\}$, donde $\widetilde{+}$ viene definida por

$$x \widetilde{+} y = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \text{ e } y \text{ son proporcionales,} \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

se obtiene el llamado polinomio de Steiner dual, a saber:

$$\mathrm{vol}(K \widetilde{+} \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \widetilde{\mathrm{W}}_i(K; E)\lambda^i.$$

En esta charla estudiaremos propiedades estructurales del conjunto de raíces del polinomio dual de Steiner, dando en dimensión 3 y 4 una descripción precisa de su localización en el plano complejo. Además, obtendremos una expresión integral del funcional dual, a saber, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \widetilde{\mathrm{W}}_i(K; E) m_i(\mu)$, correspondiente al polinomio dual con pesos asociados a una medida y proporcionaremos una desigualdad para la familia de polinomios duales de Steiner generalizados.

Universidad de Murcia