Lección 8

Acotación y compacidad

Para subconjuntos de un espacio métrico, estudiamos ahora la noción de *acotación*, que como ocurría con la complitud, no es una noción topológica, pero se conserva en un espacio normado, al cambiar su norma por otra equivalente. Probamos fácilmente la versión para $\mathbb{R}^N$ del teorema de Bolzano-Weierstrass. Relacionada con dicho teorema discutimos brevemente la noción de *divergencia* para sucesiones de vectores de $\mathbb{R}^N$.

Directamente relacionada con la acotación, estudiamos entonces la noción de *compacidad*, que será muy importante a la hora de estudiar las propiedades de las funciones continuas. La compacidad sí es una propiedad topológica, pero no vamos a trabajar con la noción general de compacidad en espacios topológicos, sino con otra propiedad mucho más sencilla que, para espacios métricos, es equivalente a la compacidad.

8.1. Acotación en espacios métricos

Sin duda, la noción de acotación tiene gran utilidad para trabajar en $\mathbb{R}$. La definición de conjunto acotado nace ligada al orden de $\mathbb{R}$, y de hecho podemos usarla en cualquier conjunto ordenado. Sin embargo, un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si, y sólo si, está mayorado en valor absoluto, es decir, el conjunto $\{\,|x| \,:\, x \in A\,\}$ está mayorado. Esto sugiere ya la forma en que podemos definir la acotación en cualquier espacio normado: bastará sustituir el valor absoluto por la norma del espacio.

Pero podemos llegar aún más lejos, pues de nuevo para todo conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, comprobamos que A está acotado si, y sólo si, el conjunto $\{\,|y - x| : x, y \in A\,\}$ está mayorado. En efecto, si A está acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in A$, luego para cualesquiera $x, y \in A$ tenemos $|x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$. Pero recíprocamente, si existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x - y| \leqslant R$ para cualesquiera $x, y \in A$, fijado $a \in A$ tenemos claramente $|x| \leqslant |x - a| + |a| \leqslant R + |a|$ para todo $x \in A$, luego A está acotado. Vista de esta forma, la noción de acotación sólo involucra la distancia usual de $\mathbb{R}$, por lo que podemos definirla de forma análoga en cualquier espacio métrico.

Si E es un espacio métrico cuya distancia denotamos por d, se dice que un conjunto no vacío $A \subset E$ está **acotado**, cuando el conjunto de números reales $\{d(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado. El *diámetro* de A es entonces el número real no negativo $\operatorname{diam} A$ definido por

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

noción que se inspira en el diámetro de una circunferencia, o de una esfera.

Es evidente que si A es un conjunto acotado, todo subconjunto no vacío de A también está acotado. Para que no haya excepciones, convenimos que *el conjunto vacío está acotado*, con $\operatorname{diam} \emptyset = 0$. Por tanto $\operatorname{diam} A = 0$ si, y sólo si, A es vacío o se reduce a un punto.

Por ejemplo, es claro que si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, entonces A está acotado para la distancia usual de $\mathbb{R}$ si, y sólo si, está mayorado y minorado, en cuyo caso $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.

En cualquier espacio métrico, un ejemplo claro de conjunto acotado es una bola cerrada, y por tanto cualquier subconjunto suyo. Recíprocamente, todo conjunto acotado está contenido en una bola abierta, cuyo centro se puede elegir con total libertad. En resumen, tenemos:

- *Un subconjunto A de un espacio métrico E está acotado si, y sólo si, está contenido en una bola. De hecho, si A está acotado, para cada $z \in E$ se puede encontrar $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(z,r)$.*

Si $z \in E$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $A \subset \overline{B}(z,r)$ para cualesquiera $x,y \in A$ se tiene:

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \leqslant 2r$$

luego A está acotado, con $\operatorname{diam} A \leqslant 2r$.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto acotado y sea $z \in E$ arbitrario. Fijamos $a \in A$, pues si $A = \emptyset$ no hay nada que demostrar. Entonces, para todo $x \in A$ se tiene

$$d(x,z) \leqslant d(x,a) + d(a,z) \leqslant \operatorname{diam} A + d(a,z)$$

luego bastará tomar $r > \operatorname{diam} A + d(a,z)$, para tener $A \subset B(z,r)$. ■

Conviene resaltar que la relación entre el radio y el diámetro de una bola no es siempre la que podría esperarse. Por ejemplo, si consideramos la distancia discreta en un conjunto E con al menos dos elementos, para todo $x \in E$ la bola cerrada $\overline{B}(x,1)$ tiene diámetro 1, igual al radio, y la bola abierta $B(x,1)$ tiene diámetro 0, menor que el radio. En lo que sigue no vamos a prestar mucha atención al diámetro de un conjunto, sólo nos interesa la acotación.

Es obvio que si A es un subconjunto finito de un espacio métrico E, entonces A está acotado. El siguiente paso es pensar en un subconjunto numerable de E, o lo que es lo mismo, en el conjunto de los términos de una sucesión de puntos de E. Naturalmente, si $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\{x_n\}$ es una **sucesión acotada** cuando el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Es claro que entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también está acotada.

El resultado anterior nos dice que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si, y sólo si, existe $z \in E$ tal que la sucesión $\{d(x_n,z)\}$ está acotada. Esto hace completamente obvia la relación entre sucesiones convergentes y acotadas: si $\{x_n\} \to x \in E$, de $\{d(x_n,x)\} \to 0$ deducimos que la sucesión $\{d(x_n,x)\}$ está acotada. Así pues:

- *En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente está acotada.*

Por supuesto, el recíproco es falso: en cualquier espacio métrico que contenga al menos dos puntos, es fácil dar ejemplos de sucesiones acotadas que no son convergentes.

Es importante resaltar que la acotación no es una propiedad topológica: cuando sustituimos la distancia de un espacio métrico por otra equivalente, un subconjunto acotado puede dejar de serlo, y viceversa, como vamos a ver.

Ejemplo. *Dos distancias equivalentes que no dan lugar a los mismos conjuntos acotados.* Si d es una distancia cualquiera en un conjunto no vacío E, podemos definir otra distancia ρ en E de la siguiente forma:

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall x,y \in E \tag{1}$$

Comprobemos que ρ es una distancia en E, equivalente a d. Para $x,y \in E$ se tiene claramente $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, mientras que $\rho(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$. Para la desigualdad triangular usamos que la función $t \mapsto t/(1+t)$, de $\mathbb{R}_0^+$ es sí mismo, es creciente. Entonces, para $x,y,z \in E$ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

Observamos además que

$$\rho(x,y) < 1 \qquad \text{y} \qquad d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1-\rho(x,y)} \qquad \forall x,y \in E \tag{2}$$

En vista de (1) y (2) vemos claramente que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E y $x \in E$, entonces $\{d(x_n,x)\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\rho(x_n,x)\} \to 0$. Así pues, las distancias d y ρ dan lugar a las mismas sucesiones convergentes, luego son equivalentes.

Finalmente, es claro que todo subconjunto de E está acotado para la distancia ρ, cosa que no tiene por qué ocurrir para d. Por ejemplo, d podría ser la distancia usual de $\mathbb{R}$. ■

8.2. Acotación en espacios normados

En un espacio normado X usamos siempre, como tantas veces hemos dicho, la distancia asociada a su norma. Entonces, un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, está contenido en una bola de centro 0, lo que equivale a que A esté **acotado en norma**, es decir, a que el conjunto de números reales $\{\|x\| : x \in A\}$ esté mayorado:

$$A \text{ acotado} \iff \exists M > 0 : \|x\| \leqslant M \quad \forall x \in A$$

Si $\|\cdot\|'$ es otra norma en X, y existe una constante $\rho > 0$ tal que $\|x\|' \leqslant \rho\,\|x\|$ para todo $x \in X$, está claro que todo conjunto acotado para la norma $\|\cdot\|$ lo estará también para $\|\cdot\|'$. Cuando ambas normas son equivalentes, podemos intercambiarlas, y obtenemos:

- *Dos normas equivalentes en un espacio vectorial dan lugar a los mismos subconjuntos acotados.*

En particular, en $\mathbb{R}^N$ podemos hablar sin ambigüedad de subconjuntos acotados, son los acotados para cualquier norma cuya topología sea la usual de $\mathbb{R}^N$. Podemos averiguar si un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ está acotado viendo lo que ocurre en cada coordenada. De hecho, lo mismo es cierto en cualquier producto de espacios normados:

- *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ espacios normados y $X = \prod_{k=1}^{N} X_k$ el espacio normado producto. Un subconjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, el conjunto $A_k = \{x(k) : x \in A\}$ está acotado, para todo $k \in I_N$.*

Basta pensar, como hemos hecho otras veces, que para todo $k \in I_N$ se tiene

$$\|x(k)\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|x(j)\| \qquad \forall x \in X$$

La primera desigualdad nos dice claramente que si A está acotado, entonces A_k está acotado para todo $k \in I_N$. Recíprocamente, tomando $M_j = \sup\{\|x(j)\| : x \in A_j\}$ para todo $j \in I_N$, la segunda desigualdad nos dice que

$$\|x\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{N} M_j \qquad \forall x \in A$$

luego A está acotado. ■

8.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Como caso particular del último resultado, para una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de $\mathbb{R}^N$, tenemos:

$$\{x_n\} \text{ está acotada} \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \text{ está acotada } \ \forall k \in I_N$$

Para sucesiones convergentes teníamos la equivalencia análoga, luego podemos ya adivinar que el principal resultado sobre convergencia de sucesiones de números reales también será cierto en $\mathbb{R}^N$, pero debemos salvar un obstáculo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$, para cada $k \in I_N$ la sucesión de números reales $\{x_n(k)\}$ admite una sucesión parcial convergente. El problema es que, en principio, dicha sucesión parcial se obtiene mediante una aplicación $\sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que depende de k, y no tenemos una sola sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ sea convergente *para todo* $k \in I_N$, para concluir que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente. La forma de resolver este problema se puede adivinar: extraer sucesiones parciales en un proceso iterativo, de forma que en cada paso se consigue la convergencia en una nueva componente, manteniendo la de las anteriores. Este proceso se entiende mejor si razonamos por inducción.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sucesión acotada de vectores de* $\mathbb{R}^N$ *admite una sucesión parcial convergente.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre N. La etapa base está clara, sabemos que el teorema es cierto para $N = 1$. Suponiendo que es cierto en $\mathbb{R}^N$, lo demostramos en $\mathbb{R}^{N+1}$. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribiendo $y_n(k) = x_n(k)$ para todo $k \in I_N$ tenemos $y_n \in \mathbb{R}^N$, y hemos conseguido así una sucesión $\{y_n\}$ de vectores de $\mathbb{R}^N$, que evidentemente está acotada. Por la hipótesis de inducción, $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial convergente $\{y_{\varphi(n)}\}$. Tenemos así que $\{x_{\varphi(n)}(k)\} = \{y_{\varphi(n)}(k)\}$ converge para todo $k \in I_N$. Ahora $\{x_{\varphi(n)}(N+1)\}$ es una sucesión acotada de números reales, que admitirá una sucesión parcial convergente $\{x_{\varphi(\tau(n))}(N+1)\}$. Definiendo $\sigma = \varphi \circ \tau$ es claro que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Sabemos que $\{x_{\sigma(n)}(N+1)\}$ es convergente. Pero además, para todo $k \in I_N$, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ también es convergente, por ser una sucesión parcial de $\{x_{\varphi(n)}(k)\}$, que era convergente. En resumen, $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ es convergente para todo $k \in I_{N+1}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ converge. ■

Prestemos atención, igual que hacíamos en $\mathbb{R}$, a las sucesiones que no verifican la tesis del teorema anterior. Recordemos que, para una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales, que $\{\lambda_n\}$ no admita ninguna sucesión parcial convergente equivale a que $\{\lambda_n\}$ sea divergente, lo que por definición significa que $\{\,|\lambda_n|\,\} \to +\infty$. En $\mathbb{R}^N$ es más lógico tomar la primera de estas condiciones como definición de sucesión divergente, porque sólo involucra la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Pero enseguida probaremos una caracterización análoga a la que teníamos en $\mathbb{R}$.

Así pues, si $x_n \in \mathbb{R}^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión $\{x_n\}$ diverge, o que $\{x_n\}$ es una **sucesión divergente**, cuando ninguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente, en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \to \infty$. Es claro que entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también diverge. El teorema anterior nos da una caracterización de las sucesiones divergentes:

- *Si* $\|\cdot\|$ *es una norma en* $\mathbb{R}^N$ *cuya topología es la usual de* $\mathbb{R}^N$ *y* $\{x_n\}$ *es una sucesión de vectores de* $\mathbb{R}^N$*, se tiene:*

$$\{x_n\} \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \{\,\|x_n\|\,\} \to +\infty$$

Por el teorema anterior, $\{x_n\} \to \infty$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ no admite una sucesión parcial acotada, lo que claramente equivale a que $\{\,\|x_n\|\}$ no admita una sucesión parcial acotada, es decir, a que $\{\,\|x_n\|\,\} \to +\infty$. ■

Es claro que, si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^N$, y $\{x_n(k)\}$ es divergente para algún $k \in I_N$, entonces $\{x_n\}$ es divergente. Pero conviene observar que el recíproco no es cierto, $\{x_n\}$ puede ser divergente, aunque ninguna de las sucesiones $\{x_n(k)\}$ con $k \in I_N$ sea divergente. Por ejemplo la sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(x_n, y_n) = \big(n\cos(n\pi/2)\,,\, n\,\mathrm{sen}(n\pi/2)\big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

es divergente, pero $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ no lo son.

Es un gran error pensar que el teorema de Bolzano-Weierstrass pueda ser cierto en cualquier espacio normado, no digamos ya en cualquier espacio métrico. De hecho se puede probar que *en todo espacio normado de dimensión infinita existe una sucesión acotada que no admite ninguna sucesión parcial convergente*.

Por tanto, cuando una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de un espacio normado X verifica que $\{\|x_n\|\} \to +\infty$, podemos asegurar que $\{x_n\}$ no admite ninguna sucesión parcial convergente, pero el recíproco está muy lejos de ser cierto.

8.4. Compacidad

No obstante lo recién comentado sobre el teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos pensar en una propiedad muy deseable para un espacio métrico, que ahora vamos a estudiar.

Se dice que un espacio métrico E es **compacto** cuando toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente. Nótese que no estamos hablando de sucesiones acotadas, sino de *todas* las sucesiones de puntos de E. Para un subconjunto A de un espacio métrico E, decimos que A es un subconjunto compacto de E cuando A es un espacio métrico compacto con la distancia inducida por la de E. Claramente, esto significa que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge *a un punto de* A.

Está claro que la compacidad de un espacio métrico es una propiedad topológica, puesto que se enuncia en términos de convergencia de sucesiones. Sin embargo conviene dejar claro que esta no es la noción de compacidad que se usa en espacios topológicos generales, sino otra que no vamos a explicar. Cuando un espacio topológico Ω verifica que toda sucesión de puntos de Ω admite una sucesión parcial convergente, se dice que Ω es *secuencialmente compacto*. Ocurre que un espacio topológico puede ser compacto y no ser secuencialmente compacto, y viceversa. Sin embargo, ambas nociones sí son equivalentes para espacios métricos. Eso nos permite, como hemos hecho, usar la compacidad secuencial para definir los espacios métricos compactos, para no tener que manejar la noción general de compacidad, que es más complicada.

La relación entre la compacidad de un espacio métrico y la de un subespacio métrico suyo, es análoga a la que teníamos para la complitud:

- *Sea E un espacio métrico y A un subespacio métrico de E.*
  - (i) *Si A es compacto, entonces A es un subconjunto cerrado de E.*
  - (ii) *Si E es compacto y A es un subconjunto cerrado de E, entonces A es compacto.*

(i). Para $x \in \overline{A}$, sabemos que existe una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A tal que $\{a_n\} \to x$. Por ser A compacto tenemos una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $a \in A$, pero también $\{a_{\sigma(n)}\} \to x$, luego $x = a \in A$. Esto prueba que $\overline{A} \subset A$, es decir, A es cerrado.

(ii). Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A, por ser E compacto tenemos una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ tal que $\{a_{\sigma(n)}\} \to x \in E$. Ahora, por ser A cerrado, tenemos $x \in A$. Esto prueba que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A, es decir, A es compacto. ■

Del resultado anterior deducimos que, dado un espacio métrico compacto E, un subconjunto A de E es compacto si, y sólo si, es cerrado.

Por otra parte, la relación entre compacidad y acotación es fácil de adivinar:

- *Todo espacio métrico compacto está acotado.*

Por reducción al absurdo, supongamos que E es un espacio métrico compacto, pero no está contenido en ninguna bola. Fijado un punto cualquiera $z \in E$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, z) > n$. Entonces $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$, es decir, $\{d(x_{\sigma(n)}, x)\} \to 0$. Como $d(x_{\sigma(n)}, z) \leqslant d(x_{\sigma(n)}, x) + d(x, z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que la sucesión $\{d(x_{\sigma(n)}, z)\}$ está mayorada, lo cual es una contradicción, ya que $d(x_{\sigma(n)}, z) \geqslant \sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Enlazando los dos resultados anteriores, vemos que si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico E, entonces A es un subconjunto cerrado y acotado de E. Para subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, tenemos el recíproco, que en realidad es una forma equivalente de enunciar el teorema de Bolzano-Weierstrass:

- *Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Ya hemos visto que una implicación es válida, no sólo en $\mathbb{R}^N$, sino en cualquier espacio métrico. Para el recíproco, sea A un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$. Toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A es una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$, y el teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{a_n\}$ admite una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un vector $x \in \mathbb{R}^N$. Como A es cerrado, tenemos $x \in A$, lo que prueba que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A, es decir, A es compacto. ■

Deducimos claramente que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^N$ y $r \in \mathbb{R}^+$, y para cualquier norma en $\mathbb{R}^N$ cuya topología sea la usual de $\mathbb{R}^N$, la bola cerrada $\overline{B}(x,r)$ y la esfera $S(x,r)$ son conjuntos compactos. La primera afirmación es importante, porque nos dice que todo punto de $\mathbb{R}^N$ tiene un entorno compacto. Esto significa que, cuando trabajamos *localmente*, es decir, cuando sólo nos interesa lo que ocurre en un entorno arbitrariamente pequeño de un punto $x \in \mathbb{R}^N$, siempre nos podemos situar en un espacio métrico compacto.

8.5. Ejercicios

1. Probar que si $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos acotados de un espacio métrico E, entonces el conjunto $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ está acotado.

2. Probar que si A es un subconjunto acotado de un espacio métrico E, entonces $\overline{A}$ está acotado, con $\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$.

3. Probar que un subconjunto A de un espacio métrico E está acotado si, y sólo si, toda sucesión de puntos de A está acotada.

4. Se considera en $\mathbb{R}$ la distancia ρ definida por

$$\rho(x,y) = |e^x - e^y| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

¿Qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ está acotados para la distancia ρ ?

5. Probar que en cualquier espacio métrico, toda sucesión de Cauchy está acotada.

6. Probar que, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de un espacio métrico, que admite una sucesión parcial convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

7. Probar que todo espacio métrico compacto es completo.

8. Sea X un espacio normado. Probar que, para cualesquiera $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\operatorname{diam} B(x,r) = \operatorname{diam} \overline{B}(x,r) = 2r$$

9. Probar que si dos normas en un mismo espacio vectorial dan lugar a los mismos conjuntos acotados, entonces dichas normas son equivalentes.

10. Dado un subconjunto A de un espacio normado, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) A está acotado
    (ii) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{\lambda_n\} \to 0$, entonces $\{\lambda_n a_n\} \to 0$.
    (iii) Para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A se tiene que $\{a_n/n\} \to 0$.

    ¿Significa esto que si $\{a_n/n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ está acotada?

11. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de vectores de $\mathbb{R}^N$ y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales. Probar que

    (i) Si $\{y_n\}$ está acotada y $\{x_n\}$ es divergente, entonces $\{x_n + y_n\}$ es divergente.
    (ii) Si $\{x_n\}$ es divergente y $\inf\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$, entonces $\{\lambda_n x_n\}$ es divergente.

12. Probar que todo espacio métrico finito es compacto. Probar también que, en un conjunto no vacío E con la distancia discreta, todo subconjunto compacto de E es finito.

13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de puntos de un espacio métrico y $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Probar que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

14. Probar que, si E es un espacio métrico compacto, y A es un subconjunto infinito de E, entonces $A' \neq \emptyset$. ¿Puede A ser discreto?

15. Probar la siguiente generalización del principio de los intervalos encajados: si $\{K_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico compacto, tal que $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la intersección $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ no es vacía.