

# El espacio euclídeo, espacios normados y espacios métricos

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el *espacio euclídeo*  $N$ -dimensional, donde  $N$  es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático.

Partimos de la definición de  $\mathbb{R}^N$  y su estructura algebraica básica, la de *espacio vectorial*. Al estudiar el *producto escalar* en  $\mathbb{R}^N$ , completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides. De hecho introducimos la noción más general de *espacio pre-hilbertiano* y manejamos en este tipo de espacio la norma asociada al producto escalar, que en el caso particular de  $\mathbb{R}^N$  es la *norma euclídea*.

Abstrayendo las propiedades básicas de la norma de un espacio pre-hilbertiano, definimos lo que se entiende en general por una *norma* en un espacio vectorial, llegando así a la noción de *espacio normado*. Veremos ejemplos de normas en  $\mathbb{R}^N$  distintas de la euclídea, así como algunos espacios normados de dimensión infinita. Por último veremos que, en todo espacio normado, se puede definir de manera coherente la distancia entre dos puntos, motivando así las nociones generales de *distancia* y *espacio métrico*.

## 1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^N$

Repasamos brevemente la estructura de espacio vectorial de  $\mathbb{R}^N$ , aprovechando para fijar la notación que vamos a usar. En todo lo que sigue,  $N$  será un número natural fijo y escribiremos

$$\Delta_N = \{k \in \mathbb{N} : k \leq N\} = \{1, 2, \dots, N\}$$

Recordamos que  $\mathbb{R}^N$  es el producto cartesiano de  $N$  copias de  $\mathbb{R}$ , es decir, el conjunto de todas las posibles  $N$ -uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}\}$$

Dado  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , los números reales  $x_1, x_2, \dots, x_N$  son las **componentes** de la  $N$ -upla  $x$ , más concretamente,  $x_k$  será la  $k$ -ésima componente de  $x$ , para cada  $k \in \Delta_N$ . Esta es una notación muy habitual: cuando usamos una determinada letra para denotar una  $N$ -upla, la misma letra con los subíndices  $1, 2, \dots, N$  nos sirve para denotar sus componentes.

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de  $\mathbb{R}^N$ , pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando consideramos sucesiones de elementos de  $\mathbb{R}^N$ . Conviene por tanto disponer de una notación alternativa. Para valores concretos de  $N$ , podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

En general, cabe recordar que una  $N$ -upla de números reales es una aplicación de  $\Delta_N$  en  $\mathbb{R}$ . De hecho, la  $N$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  es la aplicación  $x : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $x(k) = x_k$  para todo  $k \in \Delta_N$ . Por tanto, aunque pocas veces pensemos en  $x$  como una función, tiene perfecto sentido denotar por  $x(k)$  a la  $k$ -ésima componente de la  $N$ -upla  $x$ . Tenemos así una notación que evita los subíndices, permitiendo usarlos para otros fines.

En  $\mathbb{R}^N$  disponemos de las operaciones de **suma** y **producto por escalares**, que vienen definidas, para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) \end{aligned}$$

Obsérvese que estas operaciones son caso particular de las que usamos para funciones reales de variable real, pues para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $k \in \Delta_N$ , tenemos claramente

$$(x + y)(k) = x(k) + y(k) \quad \text{y} \quad (\lambda x)(k) = \lambda x(k)$$

Sabemos que, con estas dos operaciones,  $\mathbb{R}^N$  tiene estructura de *espacio vectorial*. Aquí y en lo sucesivo, cuando hablemos de un espacio vectorial, se entenderá siempre construido sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales, único cuerpo escalar que vamos a manejar.

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^N$  tiene *dimensión*  $N$ , es decir, todas sus *bases* constan de  $N$  vectores. Destacamos la que llamaremos *base usual*,  $\Phi = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  donde, para cada  $k \in \Delta_N$ , llamamos  $e_k$  a la  $N$ -upla cuya  $k$ -ésima componente es 1 y las demás se anulan, es decir:

$$e_k(k) = 1 \quad \text{y} \quad e_k(j) = 0 \quad \forall j \in \Delta_N \setminus \{k\}$$

He aquí un ejemplo en el que resulta cómoda la notación antes explicada. Usamos subíndices para numerar los elementos de  $\Phi$ , así que, para cada  $k \in \Delta_N$ , tenemos una  $N$ -upla  $e_k \in \mathbb{R}^N$ , cuyas componentes ya no conviene denotar con subíndices. Para  $j, k \in \Delta_N$ , es más cómodo denotar por  $e_k(j)$  a la  $j$ -ésima componente de la  $N$ -upla  $e_k$ , como hemos hecho.

Para cada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , la única expresión de  $x$  como combinación lineal de elementos de  $\Phi$  viene dada por

$$x = \sum_{k=1}^N x_k e_k = \sum_{k=1}^N x(k) e_k$$

Así pues, las *coordenadas* de cada vector  $x \in \mathbb{R}^N$ , con respecto a la base usual de  $\mathbb{R}^N$ , son precisamente las componentes de la  $N$ -upla  $x$ .

Recordemos que  $\mathbb{R}^N$  es, salvo isomorfismos, el *único* espacio vectorial de dimensión  $N$ . Se dice que dos espacios vectoriales son *isomorfos* cuando existe entre ellos un *isomorfismo*, esto es, una biyección lineal. Si  $\Psi$  es una base de un espacio vectorial  $X$ , y  $\Psi$  consta de  $N$  vectores, la aplicación  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ , que a cada vector de  $X$  hace corresponder la  $N$ -upla formada por sus coordenadas en la base  $\Psi$ , es lineal y biyectiva. Nótese que  $f(\Psi) = \Phi$ , es decir,  $f$  transforma la base  $\Psi$  que hemos usado para definirla, en la base usual de  $\mathbb{R}^N$ . Queda bien claro que *todo espacio vectorial de dimensión  $N$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^N$* .

Damos por conocida la interpretación geométrica de los elementos de  $\mathbb{R}^N$  como los puntos, o los vectores libres, en un espacio de  $N$  dimensiones, en el que hemos fijado un sistema de referencia cartesiano. Para  $N = 2$  tenemos un plano y para  $N = 3$  el espacio tridimensional que somos capaces de percibir, pues para  $N \geq 4$  perdemos la intuición geométrica. Como ocurre en el caso  $N = 1$ , al interpretar  $\mathbb{R}$  como una recta, esta visión geométrica sólo se usa para guiar la intuición, nunca como argumento válido en las demostraciones.

## 1.2. Producto escalar

El *producto escalar de dos vectores*  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$  es, por definición, el número real  $(x|y)$  dado por

$$(x|y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k = \sum_{k=1}^N x(k) y(k) \quad (1)$$

y decimos también que la aplicación  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $(x, y) \mapsto (x|y)$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , es el **producto escalar** en  $\mathbb{R}^N$ . Para  $N = 1$ , el producto escalar en  $\mathbb{R}$  es el producto usual de números reales.

En general, el producto escalar en  $\mathbb{R}^N$  tiene tres propiedades clave, todas ellas evidentes:

$$\text{(P.1)} \quad (\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y) \quad \forall u, v, y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{(P.2)} \quad (x|y) = (y|x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$$\text{(P.3)} \quad (x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Vamos a recordar la nomenclatura que suele usarse en relación con estas tres propiedades, trabajando en un espacio vectorial arbitrario  $X$ , con una *forma en dos variables*, esto es, una aplicación  $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se dice que  $\varphi$  es una *forma bilineal* en  $X$ , cuando es lineal en cada variable, es decir, cuando fijado cualquier  $z \in X$ , tanto  $x \mapsto \varphi(x, z)$  como  $y \mapsto \varphi(z, y)$  son aplicaciones lineales de  $X$  en  $\mathbb{R}$ . Se dice que la forma bilineal  $\varphi$  es *simétrica* cuando verifica que  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  para cualesquiera  $x, y \in X$ . Entonces, la *forma cuadrática* asociada a  $\varphi$  es la aplicación  $Q: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(x) = \varphi(x, x)$  para todo  $x \in X$ , y se dice que  $Q$  es *definida positiva*, cuando verifica que  $Q(x) > 0$  para todo  $x \in X \setminus \{0\}$ .

La propiedad **(P.1)** nos dice que el producto escalar en  $\mathbb{R}^N$  es lineal en la primera variable, pero entonces **(P.2)** nos da también la linealidad en la segunda variable, así como la simetría. Por último, **(P.3)** nos dice que la forma cuadrática asociada es definida positiva. Queda así motivada la definición que sigue.

Un **producto escalar** en un espacio vectorial  $X$  es una forma bilineal simétrica en  $X$ , cuya forma cuadrática asociada es definida positiva. Un **espacio pre-hilbertiano** es, por definición, un espacio vectorial dotado de un producto escalar. Por supuesto,  $\mathbb{R}^N$  con el producto escalar definido como en (1):

$$\varphi(x, y) = (x|y) = \sum_{k=1}^N x(k)y(k) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

es un espacio pre-hilbertiano, que se conoce como el **espacio euclídeo  $N$ -dimensional**.

Como ejemplo de dimensión infinita, el espacio vectorial  $C[0, 1]$  de todas las funciones continuas del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , se convierte en espacio pre-hilbertiano definiendo

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt \quad \forall x, y \in C[0, 1] \quad (2)$$

En efecto, la linealidad de la integral nos dice que  $\varphi$  es una forma bilineal en  $C[0, 1]$ , que obviamente es simétrica. Pero del crecimiento estricto de la integral deducimos que la forma cuadrática asociada es definida positiva, puesto que si  $x \in C[0, 1] \setminus \{0\}$ , tenemos  $x(t)^2 \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  y esta desigualdad ha de ser estricta para algún  $t \in [0, 1]$ , luego

$$\varphi(x, x) = (x|x) = \int_0^1 x(t)^2 dt > 0$$

### 1.3. Norma euclídea

A cada  $x \in \mathbb{R}^N$  vamos ahora a asociar un número real no negativo que, como veremos, se interpreta geoméricamente como la longitud del vector  $x$ , o la longitud de cualquier segmento que usemos para representarlo. De hecho, lo hacemos en cualquier espacio pre-hilbertiano  $X$ . Igual que en  $\mathbb{R}^N$ , denotaremos por  $(x, y) \mapsto (x|y)$  al producto escalar de  $X$ .

Se define la **norma de un vector**  $x \in X$  como la raíz cuadrada del producto escalar de  $x$  por sí mismo, es decir, el número real no negativo  $\|x\|$  dado por

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (3)$$

Se dice también que la aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $x \mapsto \|x\|$  para todo  $x \in X$ , es la **norma** del espacio pre-hilbertiano  $X$ , o la norma asociada al producto escalar de  $X$ .

Destacamos las tres propiedades básicas de la norma recién definida:

- (N.1)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$   
 (N.2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 (N.3)  $x \in X, \|x\| = 0 \implies x = 0$

La tercera es evidente: si fuese  $x \neq 0$  se tendría  $\|x\|^2 = (x|x) > 0$ . La igualdad (N.2) se comprueba también inmediatamente:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2 (x|x) = \lambda^2 \|x\|^2$$

y basta tomar raíces cuadradas. Para probar (N.1) necesitamos la siguiente relación clave entre norma y producto escalar.

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz.** *En todo espacio pre-hilbertiano  $X$ , se tiene:*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad (4)$$

Además, se verifica la igualdad si, y sólo si,  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes.

**Demostración.** Si  $x, y \in X$  son linealmente dependientes, se tendrá  $y = 0$ , o bien,  $x = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En el primer caso la igualdad buscada es trivial y en el segundo basta usar (N.2):

$$|(x|y)| = |(\lambda y|y)| = |\lambda| \|y\|^2 = \|x\| \|y\|$$

Supongamos pues que  $x, y \in X$  son linealmente independientes, y en particular no nulos, para probar la desigualdad estricta en (4). Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$0 < (x - \lambda y|x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

y en particular, tomando  $\lambda = (x|y) / \|y\|^2$  obtenemos

$$0 < \|x\|^2 - \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2} \quad \text{es decir,} \quad \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2} < \|x\|^2$$

Basta ahora multiplicar ambos miembros por  $\|y\|^2 > 0$  y tomar raíces cuadradas. ■

La propiedad (N.1) se comprueba ya fácilmente. Para  $x, y \in X$ , basta pensar que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Abstrayendo las tres propiedades que tiene la norma de un espacio pre-hilbertiano, llegaremos más adelante a la noción general de norma en un espacio vectorial.

Por supuesto, todo lo dicho sobre la norma de un espacio pre-hilbertiano, es válido en el espacio euclídeo  $N$ -dimensional, cuyo producto escalar se definió en (1). La norma asociada a dicho producto escalar, definida como caso particular de (3), es la **norma euclídea** en  $\mathbb{R}^N$ . Así pues, la norma euclídea de un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  viene dada por

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^N x_k^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^N x(k)^2 \right)^{1/2} \quad (3')$$

Usando el teorema de Pitágoras, confirmamos claramente lo que habíamos anunciado:  $\|x\|$  se interpreta como la longitud del vector  $x$ , la distancia del origen al punto  $x$ , o la longitud de cualquier otro segmento que usemos para representar al vector  $x$ . Nótese que en el caso  $N = 1$  se tiene  $\|x\| = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos y debemos entender la norma euclídea como una generalización natural del valor absoluto, disponible para cualquier dimensión  $N$ .

Resaltamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que en  $\mathbb{R}^N$  toma la forma

$$\left| \sum_{k=1}^N x(k)y(k) \right| \leq \left( \sum_{k=1}^N x(k)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^N y(k)^2 \right)^{1/2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad (4')$$

La igualdad sólo se da cuando  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes, es decir, cuando los puntos  $x$  e  $y$  están alineados con el origen. En el caso  $N = 1$  tenemos una igualdad bien conocida,  $|xy| = |x| |y|$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ . Recíprocamente, la igualdad en (4') sólo se verifica para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , cuando  $N = 1$ .

Comentemos la interpretación geométrica de las propiedades básicas de la norma euclídea. La propiedad **(N.1)** recibe el nombre de *desigualdad triangular*, pues afirma que cada lado de un triángulo es menor o igual que la suma de los otros dos. La propiedad **(N.2)** se suele conocer como *homogeneidad por homotecias*. Equivale claramente a que, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , se verifiquen tres igualdades:

$$\|0\| = 0, \quad \|-x\| = \|x\| \quad \text{y} \quad \|\lambda x\| = \lambda \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

La primera no merece mucho comentario, la longitud de un segmento degenerado, cuyo origen y extremo coinciden, debe ser 0. Igual ocurre con la segunda, tampoco es una sorpresa que la longitud de un vector coincida con la de su opuesto, o que la longitud de un segmento no dependa de su orientación. Al hablar de homogeneidad por homotecias, ponemos el énfasis en la tercera igualdad, como vamos a explicar.

En cualquier espacio vectorial  $X$ , fijado  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , la aplicación  $x \mapsto \lambda x$ , de  $X$  en sí mismo, es la *homotecia* de razón  $\lambda$ . Intuitivamente, podríamos decir que consiste en aplicar un zoom, un cambio de escala en el espacio  $X$ . Pues bien, la propiedad **(N.2)** nos dice que, al aplicar a un segmento una homotecia, su longitud resulta multiplicada por la razón de homotecia.

Finalmente, **(N.3)** es una propiedad de *no degeneración*: la longitud de un segmento sólo se anula cuando se trata de un segmento degenerado.

## 1.4. Espacios normados

Una **norma** en un espacio vectorial  $X$  es una aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada  $x \in X$  hace corresponder un número real  $\|x\|$ , verificando las tres condiciones siguientes:

- (N.1) *Desigualdad triangular:*  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$
- (N.2) *Homogeneidad por homotecias:*  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (N.3) *No degeneración:*  $x \in X, \|x\| = 0 \implies x = 0$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial  $X$ , en el que hemos fijado una norma  $\|\cdot\|$ . Para cada  $x \in X$ , se dice también que el número real  $\|x\|$  es la *norma del vector*  $x$ . No debemos confundir la norma del espacio  $X$ , que es una aplicación de  $X$  en  $\mathbb{R}$ , con la norma de cada vector  $x \in X$ , que es un número real.

Enseguida veremos que, en un mismo espacio vectorial  $X$ , podemos tener varias normas distintas. Debe quedar claro que, con cada una de esas normas, tendremos un espacio normado diferente.

Antes de ver abundantes ejemplos de espacios normados, comentemos algunas propiedades inmediatas que todas las normas tienen.

Si  $\|\cdot\|$  es una norma en un espacio vectorial  $X$ , usando la homogeneidad por homotecias con  $\lambda = 0$  obtenemos  $\|0\| = 0$ , mientras que tomando  $\lambda = -1$ , vemos que  $\|-x\| = \|x\|$  para todo  $x \in X$ . Pero entonces, la desigualdad triangular implica que

$$0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \quad \forall x \in X$$

así que una norma nunca puede tomar valores negativos.

Por otra parte, dados  $x, y \in X$ , tenemos  $\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ , pero podemos intercambiar  $x$  e  $y$  para concluir que  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ . Además, tanto esta desigualdad como la triangular pueden aplicarse usando  $-y$  en lugar de  $y$ . Disponemos así de estimaciones por defecto y por exceso para la norma de cualquier suma o diferencia.

Comentemos finalmente que, mediante una obvia inducción, la desigualdad triangular puede aplicarse a sumas finitas de vectores con cualquier número de sumandos. Si además usamos la homogeneidad por homotecias, estimamos por exceso la norma de cualquier combinación lineal. En resumen, toda norma tiene siempre las propiedades que siguen, algunas de las cuales generalizan propiedades bien conocidas del valor absoluto en  $\mathbb{R}$ :

■ *En todo espacio normado  $X$ , se tiene:*

- (i)  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in X$ , siendo  $\|x\| = 0$  si, y sólo si,  $x = 0$ .
- (ii)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para cualesquiera  $x, y \in X$ .
- (iii) Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\lambda_k x_k\| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\|$$

## 1.5. Ejemplos

Claramente, el primer ejemplo de espacio normado es el que hemos usado como motivación: *todo espacio pre-hilbertiano es un espacio normado, con la norma asociada a su producto escalar*. En particular, el espacio euclídeo  $N$ -dimensional es un espacio normado,  $\mathbb{R}^N$  con la norma euclídea.

Antes de ver otros ejemplos, conviene comentar que, en todo espacio normado  $X$ , la norma de cada vector  $x \in X$  se interpreta siempre como la longitud que asignamos al vector  $x$ . En particular, cuando consideremos en  $\mathbb{R}^N$  una norma distinta de la euclídea, habremos cambiado de criterio sobre cual es la longitud de cada vector de  $\mathbb{R}^N$ .

La norma euclídea en  $\mathbb{R}$  coincide con el valor absoluto, y cualquier otra norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}$  es proporcional a ella, pues tomando  $K = \|1\| > 0$ , tenemos:  $\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \|1\| = K|x|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En cualquier espacio vectorial, dos normas proporcionales son en esencia idénticas, pues podemos entender que al sustituir una por otra, simplemente hemos cambiado la unidad de longitud. Por tanto, salvo cambios de escala, el valor absoluto es la única norma que cabe considerar en  $\mathbb{R}$ . *Siempre que hablemos de  $\mathbb{R}$  como espacio normado, se entenderá que su norma es el valor absoluto*.

Para  $N > 1$ , es bien fácil definir en  $\mathbb{R}^N$  normas que no son proporcionales a la euclídea. Concretamente, podemos definir la **norma del máximo**,  $\|\cdot\|_\infty$ , y la **norma de la suma**,  $\|\cdot\|_1$ , escribiendo, para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\|x\|_\infty = \text{máx} \{|x_k| : k \in \Delta_N\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k| \quad (5)$$

Se comprueba fácilmente que se trata de dos nuevas normas en  $\mathbb{R}^N$ , incluso la desigualdad triangular es inmediata. También es fácil ver que estas normas no proceden de ningún producto escalar en  $\mathbb{R}^N$ . Veremos sin embargo que, para ciertos problemas, la norma de la suma o la del máximo pueden ser más útiles que la euclídea.

Consideremos de nuevo el espacio vectorial  $C[0, 1]$  formado por las funciones continuas del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . Conocemos en este espacio un producto escalar que lo convierte en un espacio pre-hilbertiano, luego es un espacio normado con la norma dada por

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} = \left( \int_0^1 x(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad \forall x \in C[0, 1]$$

La analogía con la norma euclídea de  $\mathbb{R}^N$  puede continuarse, definiendo dos normas en  $C[0, 1]$  claramente inspiradas en las normas del máximo y de la suma. Para  $x \in C[0, 1]$ , basta escribir

$$\|x\|_\infty = \text{máx} \{|x(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt \quad (6)$$

Es fácil ver que así se obtienen dos nuevas normas en  $C[0, 1]$ , que no pueden proceder de un producto escalar. Tenemos pues dos ejemplos de espacios normados de dimensión infinita, que no son espacios pre-hilbertianos. Mencionamos, aunque sin explicar el motivo, que para trabajar en  $C[0, 1]$ , la norma más adecuada es  $\|\cdot\|_\infty$ , y no la asociada al producto escalar, como podría pensarse.

## 1.6. Espacios métricos

Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , el segmento que va de  $x$  a  $y$  se obtiene trasladando el que va del origen a  $y - x$ , luego la longitud del vector  $y - x$  nos da la distancia de  $x$  a  $y$ . Por tanto, cada norma que usemos en  $\mathbb{R}^N$  nos va a dar una posible definición de la distancia entre dos puntos de  $\mathbb{R}^N$ . De hecho, vamos a hacer lo mismo en cualquier espacio normado.

Si  $X$  es un espacio normado, se define la *distancia entre dos puntos* de  $X$  por

$$d(x, y) = \|y - x\| \quad \forall x, y \in X \quad (7)$$

Obtenemos así una función de dos variables  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , a partir de la cual podemos recuperar la norma de  $X$ , puesto que evidentemente

$$\|x\| = d(0, x) \quad \forall x \in X \quad (8)$$

Destacamos tres propiedades casi evidentes de la función  $d$ , que enseguida usaremos para definir lo que se entiende en general por una distancia en un conjunto cualquiera, que ya no tiene por qué ser un espacio vectorial. Para  $x, y, z \in X$  tenemos

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|z - x\| \leq \|y - x\| + \|z - y\| = d(x, y) + d(y, z) \\ d(x, y) &= \|y - x\| = \|x - y\| = d(y, x) \\ d(x, y) = 0 &\iff \|y - x\| = 0 \iff x = y \end{aligned} \quad (9)$$

Nótese que las tres propiedades obtenidas son consecuencias de las condiciones que ha de cumplir una norma, pero se han escrito de forma que en ellas sólo interviene la función  $d$ , no aparece la norma ni las operaciones de  $X$ . Ello nos lleva a la siguiente definición:

Una **distancia** en un conjunto no vacío  $E$  es una función  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  verificando las siguientes condiciones:

- (D.1) *Desigualdad triangular*  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in E$
- (D.2) *Simetría:*  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$
- (D.3) *No degeneración.* Para  $x, y \in E$ , se tiene:  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Como hicimos con las normas, destacamos algunas propiedades de todas las distancias:

- Si  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  es una distancia en un conjunto no vacío  $E$ , se tiene:

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$ .
- (ii)  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$ .
- (iii)  $n \in \mathbb{N}, x_0, x_1, \dots, x_n \in E \implies d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^n d(x_{k-1}, x_k)$ .

Para (i) basta pensar que  $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ . La desigualdad triangular nos da  $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$ , e intercambiando  $x$  con  $y$  obtenemos (ii). Finalmente (iii) se prueba por inducción sobre  $n$ , de manera obvia. ■

Cuando para un conjunto no vacío  $E$  disponemos de una distancia  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que  $E$  es un **espacio métrico**. El primer ejemplo debe ser el que hemos usado como motivación. En vista de (9), si  $\|\cdot\|$  es una norma en un espacio vectorial  $X$ , la función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en (7), es una distancia en  $X$ , que llamaremos *distancia asociada a la norma  $\|\cdot\|$*  y es la que siempre usaremos en un espacio normado. Dicho de forma más solemne: *todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico, con la distancia asociada a su norma*. Nótese que, en virtud de (8), si las distancias asociadas a dos normas en un mismo espacio vectorial son iguales, dichas normas también coinciden.

En  $\mathbb{R}^N$  disponemos ya de tantas distancias diferentes como normas hemos estudiado. Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , podemos usar la *distancia euclídea*

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^N (y(k) - x(k))^2 \right)^{1/2}$$

pero también la *distancia del máximo*  $d_\infty$  y la *distancia de la suma*  $d_1$ , asociadas a las normas que llevan el mismo nombre:

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |y(k) - x(k)| : k \in \Delta_N \} \quad \text{y} \quad d_1(x, y) = \sum_{k=1}^N |y(k) - x(k)|$$

En el caso  $N = 1$  las tres coinciden, tenemos la que llamaremos **distancia usual** de  $\mathbb{R}$ , por ser la que siempre consideramos cuando hablamos de  $\mathbb{R}$  como espacio métrico, salvo que se diga expresamente lo contrario. Viene dada por:

$$d(x, y) = |y - x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Conviene resaltar que la noción de espacio métrico es mucho más general que la de espacio normado, cosa que pondremos de manifiesto de varias formas. En primer lugar pensemos que normas y distancias se pueden restringir, para usarlas en contextos más reducidos.

Más concretamente, si  $X$  es un espacio normado, e  $Y$  es un subespacio vectorial de  $X$ , la norma  $\|\cdot\|$  de  $X$ , como aplicación de  $X$  en  $\mathbb{R}$  que es, se puede restringir a  $Y$ , obteniendo una aplicación  $\|\cdot\|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , que evidentemente es una norma en el espacio vectorial  $Y$ . Suele decirse que  $\|\cdot\|_Y$  es la **norma inducida** en  $Y$  por la norma de  $X$ . También es habitual decir que  $Y$ , con la norma  $\|\cdot\|_Y$ , es un **subespacio normado** de  $X$ .

Lo mismo puede hacerse con una distancia, aunque ahora se trate de una función de dos variables. Si  $d$  es una distancia en un conjunto  $E$ , y  $A$  es un subconjunto no vacío de  $E$ , la función  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  puede restringirse al conjunto  $A \times A \subset E \times E$ , con lo que se obtiene una función  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , que evidentemente es una distancia en  $A$ . Decimos que  $d_A$  es la **distancia inducida** por  $d$  en  $A$  y también que  $A$  con la distancia  $d_A$  es un **subespacio métrico** de  $E$ . Por ejemplo, un subespacio métrico de  $\mathbb{R}$  no es más que un subconjunto no vacío  $\mathbb{R}$  con la distancia inducida por la usual de  $\mathbb{R}$ .

Resaltemos la mayor generalidad de este segundo proceso. Si  $X$  es un espacio normado, luego un espacio métrico, y  $A$  es un subconjunto no vacío de  $X$  que no sea un subespacio vectorial, no podemos ver  $A$  como subespacio normado de  $X$ , pero sí como subespacio métrico.

Pero veamos un ejemplo de una distancia, que se puede definir en cualquier conjunto y no guarda relación con norma alguna. Sea  $E$  un conjunto no vacío arbitrario y  $\delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida, para  $x, y \in E$ , de la siguiente forma:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que  $\delta$  es una distancia, conocida como la **distancia discreta** en el conjunto  $E$ . Así pues, cualquier conjunto no vacío puede considerarse como un espacio métrico con la distancia discreta. Por supuesto, el conjunto  $E$  puede ser un espacio vectorial y, salvo en el caso trivial  $E = \{0\}$ , no puede haber una norma en  $E$  cuya distancia asociada sea la discreta. Más adelante iremos viendo que la distancia discreta no es tan exótica como a primera vista podría parecer.

## 1.7. Ejercicios

1. Probar que, en cualquier espacio pre-hilbertiano  $X$ , el producto escalar se obtiene a partir de la norma mediante la llamada *identidad de polarización*:

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

2. Si  $X$  e  $Y$  son espacios pre-hilbertianos, es una sana costumbre denotar ambos productos escalares por  $(\cdot|\cdot)$  y ambas normas asociadas por  $\|\cdot\|$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal que preserve la norma, es decir,

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X$$

Probar que entonces  $f$  también preserva el producto escalar:

$$(f(u)|f(v)) = (u|v) \quad \forall u, v \in X$$

3. Probar que todo espacio pre-hilbertiano  $X$  de dimensión  $N \in \mathbb{N}$ , se identifica totalmente con el espacio euclídeo  $N$ -dimensional, es decir, existe una biyección lineal  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  que preserva el producto escalar:

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

En este sentido podemos decir que el espacio euclídeo  $N$ -dimensional es el único espacio pre-hilbertiano de dimensión  $N$ .

4. Probar que, en todo espacio pre-hilbertiano  $X$ , se verifica la *identidad del paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Interpretar geoméricamente el resultado.

5. Para cualquier espacio pre-hilbertiano  $X$ , discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores  $x, y \in X$  para verificar que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ .
6. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en  $\mathbb{R}^N$  sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^N$  para verificar que  $\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ .
7. Probar que, para  $N > 1$ , no existe un producto escalar en  $\mathbb{R}^N$  cuya norma asociada sea la de la suma, y que lo mismo le ocurre a la norma del máximo. Probar también que, en el espacio vectorial  $C[0, 1]$ , las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  definidas en las igualdades (6) no son las asociadas a ningún producto escalar.
8. Sea  $X$  un espacio vectorial y sean  $\mu, \nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  dos normas en  $X$ . En cada uno de los siguientes casos, probar que la función  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida para todo  $x \in X$  en la forma que se indica, es una norma en  $X$ :

- (a)  $\|x\| = \mu(x) + \nu(x)$   
 (b)  $\|x\| = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$   
 (c)  $\|x\| = (\mu(x)^2 + \nu(x)^2)^{1/2}$

9. Probar que la función  $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(x, y) = |y - x|^{1/2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

es una distancia en  $\mathbb{R}$ .

10. Sean  $X$  un espacio normado,  $Y$  un espacio vectorial y  $f : Y \rightarrow X$  una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$\|y\| = \|f(y)\| \quad \forall y \in Y$$

se obtiene una norma en  $Y$ . Establecer un resultado análogo para espacios métricos.