Lagrangiano de la cromodinámica cuántica.

Sea $q^A_\alpha(x)$ el campo de los quarks,

$A = 1, 2, \ldots, N_f$ es el índice de sabor, $\alpha = 1, \ldots, N$ el de color

exp. $N=3$ y $N_f = 6$ (aunque el **top** aún no se ha visto) 1994
sí 1995

(además faltan los índices de Dirac)

El lagrangiano libre es

$$\mathcal{L}_0(x) = i\,\bar{q}^A_\alpha(x)\gamma^\mu \partial_\mu q^A_\alpha(x) = \bar{q}(x) i\not{\partial} q(x)$$

que invariante bajo (entre otros) transformaciones globales de color

$$q^A_\alpha(x) \longrightarrow q'^A_\alpha(x) = G_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x) \quad , \text{resp. } \bar{q}^A_\alpha$$

donde G es una matriz de $SU(N)$, indep. de x. Que puede parametrizarse como $G = \exp(-ig\, T_a \theta_a)$

donde T_a, $a = 1, \ldots, N^2-1$ son matrices hermíticas que son generadores de $SU(N)$, en la rep. fundamental

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad , \quad \mathrm{Tr}(T_a) = 0$$

f_{abc} reales y totalmente antisimétrico, con normalización $f_{abc} f_{dbc} = N\delta_{ad}$

en la rep. fundamental $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, λ_a matrices $N \times N$

para $N=2$ $\lambda_a = \sigma_a$ (Pauli)

para $N=3$ λ_a se llaman matrices de Gell-Mann

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

θ_a son parámetros reales y g una constante (fija) real. y adimensional.

Infinitesimalmente $\delta q^A_\alpha(x) = -ig (T_a)_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x)\, \theta_a$

ó $\delta q(x) = -ig\, T_a\, q(x)\, \theta_a$

la corriente asociada $\delta j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \delta \phi_A$ es

$$j^\mu_a(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu T_a\, q(x) \quad , \quad \partial_\mu j^\mu_a(x) = 0 \quad \text{con } \mathcal{L}_0(x).$$

$\mathcal{L}_0$ no es invariante bajo transformaciones locales $G(x) = e^{-ig T_a \theta_a(x)}$

$$\mathcal{L}_0(x) \longrightarrow \mathcal{L}'_0(x) = \bar{q}(x) G^\dagger(x)\, i\not{\partial}(G(x) q(x)) = \bar{q}(x)\, i\not{\partial}\, q(x) + \bar{q}(x) G^\dagger [i\not{\partial}, G] q$$
$$= \mathcal{L}_0(x) + i\, \bar{q}^A_\alpha(x) \gamma^\mu (G^\dagger(x)\, \partial_\mu G(x))_{\alpha\beta}\, q^A_\beta$$

se hace invariante introduciendo el campo de los gluones $A^a_\mu(x) = A^{a\dagger}_\mu(x)$ $(= A_{a\mu}(x))$ y la derivada covariante

$$\delta_{\alpha\beta}\partial^\mu \longrightarrow D^\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial^\mu - ig\, T^a_{\alpha\beta} A^\mu_a(x)$$

$$D^\mu_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x) = \partial^\mu q^A_\alpha(x) - ig\, A^\mu_a(x)\, T^a_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x)$$

ó $D^\mu q(x) = \partial^\mu q(x) - ig\, A^\mu_a\, T^a q(x)$

tal que $D^\mu q(x) \longrightarrow D'^\mu q'(x) = G(x)\, D^\mu q(x)$

Entonces

$$\mathcal{L}(x) = \bar{q}(x) i \not{D} q(x) \longrightarrow \mathcal{L}'(x) = \bar{q}'(x) i \not{D}' q'(x) = \mathcal{L}(x)$$

Para que D_μ sea covariante, A_μ^a debe transformarse adecuadamente:

$$D'^\mu q'(x) = \partial^\mu (G(x) q(x)) - i g A'^\mu_a T^a G(x) q$$

$$= G D^\mu q(x) = G(x) \partial^\mu q(x) - i g A^\mu_a(x) G(x) T^a q(x)$$

de donde $A'^\mu_a(x) T^a = G(x) T^a G^{-1}(x) A^\mu_a(x) - \frac{i}{g} (\partial^\mu G(x)) G^{-1}(x)$

Para $\theta_a(x)$ infinitesimal

$$\delta q(x) = -i g T^a q(x) \theta_a(x)$$

$$\delta A^\mu_a(x) = g f_{abc} A^\mu_c(x) \theta_b - \partial^\mu \theta_a(x)$$

Explícitamente $\mathcal{L}(x) = \bar{q}^A_\alpha(x) i \not\partial q^A_\alpha(x) + g \bar{q}^A_\alpha(x) \gamma^\mu \frac{\lambda^a_{\alpha\beta}}{2} q^A_\beta(x) A^a_\mu(x)$

que representa quarks sin masa acoplados a gluones con cte de acoplamiento, g.

A veces es conveniente la notación

$$A^\mu(x) \equiv i g T_a A^\mu_a(x) = -A^{\mu\dagger}(x), \quad D^\mu \equiv I \partial^\mu - A^\mu(x)$$

matrices $N \times N$, entonces

$$q^A(x) \rightarrow q'^A(x) = G(x) q^A(x)$$

$$D^\mu q^A(x) \rightarrow D'^\mu q'^A(x) = G(x) D^\mu q^A(x)$$

$$D^\mu \rightarrow D'^\mu = G(x) D^\mu G^{-1}(x)$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = G(x) A^\mu(x) G^{-1}(x) + (\partial^\mu G(x)) G^{-1}(x)$$

Falta la energía cinética de los gluones, que no debe romper la invariancia gauge. Para ello se define el tensor $F_{\mu\nu}(x)$

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv -[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) - [A^\mu(x), A^\nu(x)]$$

que es covariante gauge

$$F^{\mu\nu}(x) \to F'^{\mu\nu}(x) = G(x) F^{\mu\nu}(x) G^{-1}(x)$$

en componentes $F^{\mu\nu}(x) \equiv ig T_a F_a^{\mu\nu}(x)$

$$F_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + g f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x)$$

Por la covariancia $Tr[F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)] = -\frac{g^2}{2} F_a^{\mu\nu}(x) F^a_{\mu\nu}(x)$

(usando $Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ en la rep. fundamental).

es un invariante gauge local.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2g^2} Tr(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \bar{q}^A i \not{D} q^A$$

(la normalización es convencional), es el lagrangiano de QCD.

Si se incluye el término de masa (de origen electrodébil)

$$\mathcal{L}_m = -m_A \bar{q}^A q^A = -\bar{q}(x) M q(x), \quad M_{AB} = m_A \delta_{AB}$$ es ~~la~~ matriz de sabor

de masa ($N_f \times N_f$ y diagonal). ~~de~~

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \frac{1}{2g^2} Tr(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)) + \bar{q}(i\not{D} - M) q(x).$$

Con ecuaciones de movimiento

$$(i\not{D} - M) q(x) = 0$$

$$[D^\mu, F_{\mu\nu}] = -ig^2 T_a \bar{q} T_a \gamma_\nu q = -ig^2 T_a j^a_\nu(x) \equiv -g j_\nu(x)$$

$$\delta D = -\delta A$$

$$-\mathrm{Tr}\ \frac{1}{2g^2}\, 4\, [\delta D^\mu, D^\nu] F_{\mu\nu} + \bar q\, (i \delta\!\!\!/ D\, q = 0$$

$$\delta A \left(\frac{2}{g^2} [D^\nu, F_{\mu\nu}] - \bar q\, i \gamma_\mu q \right) = 0$$

$$\cancel{A_a^\mu}\ \bar q \gamma_\mu T_a q = T_a\ j$$

$$T_a \left(\bar q\, \gamma_\mu\, T_a q \right) = 0$$

$$i \bar q\, \gamma_\mu A^\mu q \overset{?}{=} \cancel{i g A^\mu_a\ \bar q\, \gamma_\mu T^a q}$$

$$= \cancel{i g A^\mu_b T_b\ \bar q\, \gamma_\mu q}$$

$$= \cancel{-i g A^\mu_a (\gamma_\mu T^a q \bar q)_{\mathrm{ab}} =}$$

$$= \ldots - A^\mu (\gamma_\mu q \bar q)_{\ldots}$$

$$= \cancel{A^\mu\ \mathrm{tr}\,(2 \gamma_\mu q \bar q\, T_a}$$

$$= - A^\mu\, \mathrm{Tr}(\mathrm{tr}\,(2\ \gamma_\mu q \bar q\, T_a))\, T_a)$$

$$= 2 A^\mu \left(\bar q\, T_a \gamma_\mu q \right) T_a$$

$\cancel{\mathrm{Tr}\,\delta A_\mu}$ $$\bar q\, \delta A_\mu \gamma^\mu q = -\mathrm{Tr}\, (\underbrace{\gamma^\mu q \bar q}_{X} \delta A_\mu)$$

$$= -\mathrm{Tr}\,(2 \mathrm{Tr}(\gamma^\mu q \bar q\, T_a)\, T_a\, \delta A_\mu) = \cancel{2\,\mathrm{Tr}\, \bar q\, T_a \delta A_\mu q}\,)$$

$$= -2\, \mathrm{Tr}(\gamma^\mu q \bar q\, T_a)\ \mathrm{Tr}(T_a \delta A_\mu) = 2 \left(\bar q\, T_a \gamma^\mu q \right) \mathrm{Tr}(T_a \delta A_\mu)$$

$$= 2\ \mathrm{Tr}(\underset{\uparrow\ \text{also -ig etc}}{j^\mu}\, \delta A_\mu)$$

En efecto $\delta W = \int d^4x \, \frac{\delta W}{\delta \phi_A} \delta \phi_A = 0 \Rightarrow \frac{\delta W}{\delta \phi_A} = 0$ son las ec. de mov.

la ec. para $\bar{q}$ es inmediata. La no trivial es la de $A_\mu(x)$.

$$\delta W = \int d^4x \left(\frac{1}{2g^2} 4 \, Tr ([\delta A^\mu, D^\nu] F_{\mu\nu}) + \bar{q} \, i \, \delta \not{D} q \right)$$
$$= \int d^4x \; Tr \left(\delta A^\mu \left(\frac{2}{g^2} [D^\nu, F_{\mu\nu}] - i \, tr(\gamma_\mu q \bar{q}) \right) \right) = 0$$

~~como δA^μ no tiene traza de color~~, ~~$[D^\nu, F_{\mu\nu}]$ y es~~ donde tr se refiere a Dirac y sabor, y Tr a color. Como $Tr \, \delta A^\mu = 0$

$$0 = \left([D^\nu, F_{\mu\nu}] \frac{2}{g^2} - i \, tr(\gamma_\mu q \bar{q}) \right)_{\text{sin Tr de color}}$$

además directamente $[D^\nu, F_{\mu\nu}]$ no tiene traza. Usando la identidad $X = X_a T_a = 2 \, T_a \, Tr(T_a X)$,

$$0 = \frac{2}{g^2} [D^\nu, F_{\mu\nu}] - i \, 2 \, T_a \, \bar{q} \gamma_\mu T_a q$$
$$\Rightarrow \quad [D^\mu, F_{\mu\nu}] = -g \, j_\nu(x) \qquad D^\mu j_\mu = 0$$

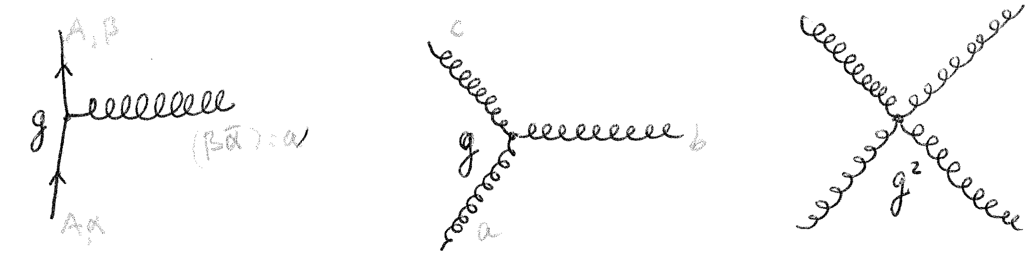
Si esto parece oscuro, inténtese obtener el mismo resultado con componentes.

De esta ecuación se deduce que $j_\mu(x)$ no se conserva, sino que $J_\mu(x) = j_\mu(x) + \frac{1}{g} [A^\nu, F_{\mu\nu}] \underset{\text{e.m.}}{=} + \frac{1}{g} \partial^\nu F_{\mu\nu}$ lo hace

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{1}{g} \partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$$

$\frac{1}{g}[A^\nu, F_{\mu\nu}]$ ~~es la contribución de los gluones a la corriente de color.~~ Es decir, los gluones tiene color (dado que $A_\mu(x)$ se transforma bajo G globales) y este se intercambia entre los gluones y los quarks.

Desarrollando el lagrangiano se obtienen los siguientes acoplamientos



$g\,\bar{q}Aq$ $\qquad$ $g\, f_{abc} A_a A_b A_c$ $\qquad$ $g^2 f_{abc} f_{ade} A_b A_c A_d A_e$

los gluones se acoplan a todo lo que tiene color incluidos ellos mismos. Esto es general en teorías no abelianas. Otra característica respecto del caso abeliano es que g es común para todas las partículas con color* debido a que las relaciones de conmutación son más restrictivas. De hecho, a nivel clásico, g puede eliminarse everywhere con $A'^a_\mu = g A^a_\mu$, $q'(x) = g\,q(x)$, $\mathcal{L}'_{QCD} = \frac{1}{g^2}\mathcal{L}_{QCD}$ cuánticamente g no es eliminable porque las ec. de mov. no son la única información relevante.

La cuantización se hace como es usual, los quarks como fermiones de espín $\frac{1}{2}$ y los gluones son campos vectoriales (espín 1). Al igual que en QED los gluones sólo tienen dos grados de libertad físicos debido a la invariancia gauge, aunque si se quiere mantener la invariancia ~~gaug~~ Lorentz explícita hay que trabajar con grados de libertad no físicos, y como en QED, la métrica no es positiva en el espacio de Hilbert total pero todo va bien en $\mathcal{H}_{\text{Físico}}$ (unitariedad, norma positiva etc.)

$$\delta(x^0-y^0)\{q_i(x), q_j^\dagger(y)\} = \delta_{ij}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

$$\delta(x^0-y^0)\,[A^\mu_a(x), \dot{A}^\nu_b(y)] = -i\,\delta_{ab}\,g^{\mu\nu}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

* SU(N) es simple

QCD tiene las siguientes propiedades.

- Unitariedad: H_{QCD} es hermítico y el operador evolución es unitario. La probabilidad se conserva
- Renormalizabilidad: produce resultados finitos para los observables
- Universalidad: g es común a todas las interacciones hadrónicas
- Libertad asintótica: La interacción efectiva a grandes momentos o pequeñas distancias es pequeña ($g(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$)
- Confinamiento: No totalmente probado. La fuerza de atracción entre partículas coloreadas crece con la distancia en forma confinante. Sólo son observables estados ligados que no tengan color ($|qqq\rangle$, $|q\bar{q}\rangle$, gluebnalls).

o combinaciones de estos, ej: núcleos

Simetrías globales de QCD.

i) $U_B(1)$

$\mathcal{L}$ es invariante bajo $\quad q(x) \to q'(x) = e^{-i\frac{\theta}{N} I} q(x)$

θ real, I la identidad en todo. La corriente Noether asociada es

$$j^\mu(x) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_A} \frac{\delta \phi_A}{\delta \theta} \right) = \frac{1}{N} \bar{q}^A_\alpha(x) \gamma^\mu q^A_\alpha(x)$$

que es la corriente bariónica. $B = \int d^3x \, \frac{1}{N} \bar{q}(x) \gamma^0 q(x)$ el número bariónico es una cte del mov., y es el generador de $U_B(1)$:

$$\cancel{\delta(x^0-y^0)\{q_i(x), q_j^\dagger(y)\} = \delta_{ij}\delta^{(4)}(x-y)}$$

$$\cancel{[B, q^A(x)] =} \qquad \cancel{[i\theta B, q(x)] = -\frac{1}{N} q(x)}$$

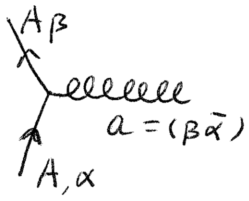
ii) $U_1(1) \otimes U_2(1) \otimes \cdots \otimes U_{N_f}(1)$

$$q^A(x) \to q'^A(x) = e^{-i\theta_A I} q^A(x) \qquad A = 1 \ldots N_f$$

I = identidad en color y Dirac. Hay N_f corrientes conservadas

$$J^A_\mu(x) = \bar{q}^A_\alpha(x) \gamma_\mu q^A_\alpha(x), \quad A = 1 \ldots N_f, \quad \alpha \text{ sumado.}$$

Es decir cada sabor se conserva por separado. Esto también se ve directamente en el lagrangiano ya que los gluones no cambian el sabor



Si dos quarks tienen igual masa, $m_i = m_j$, entonces

la simetría es mayor que $U_i(1) \otimes U_j(2) \subset U_{ij}(2) = U(1) \otimes SU(2)/Z_2$

ya que $\mathcal{L}$ es invariante bajo una rotación de $\begin{pmatrix} q^i \\ q^j \end{pmatrix}$.

Si todas las masas coinciden la simetría es $SU(N_f)$

iii) $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$

$$q_\alpha(x) \longrightarrow q'_\alpha(x) = e^{-i\theta^A T^A} q_\alpha(x)$$

$$q_\alpha(x) \longrightarrow q'_\alpha(x) = e^{-i\theta_5^A T^A \gamma_5} q_\alpha(x)$$

θ_A, θ_{5A} son N_f^2-1 parámetros reales, T^A generadores de $SU(N_f)$ en la rep. fundamental, $T^A = \frac{\lambda^A}{2}$. Estas transformaciones son una simetría si $m_A = 0\ \forall A$.

Las corrientes asociadas son invariantes gauge (color)

$$V_A^\mu(x) = \bar{q}_\alpha^Y(x)\gamma^\mu (T^A)_{YZ} q_\alpha^Z(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu T^A q(x)$$

$$A_A^\mu(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu\gamma_5 T^A q(x)$$

en presencia de masas no nulas de quarks

$$\partial_\mu V_A^\mu(x) = i(m_Y - m_Z)\,\bar{q}_\alpha^Y(x)(T^A)_{YZ} q_\alpha^Z(x)$$

$$\partial_\mu A_A^\mu(x) = i(m_Y + m_Z)\,\bar{q}_\alpha^Y(x)\gamma_5 (T^A)_{YZ} q_\alpha^Z(x)$$

Esto se deduce de

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A}\frac{\delta \phi_A}{\delta \theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)}\frac{\delta \partial_\mu \phi_A}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)}\right)\frac{\delta \phi_A}{\partial \theta} + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)}\frac{\delta \phi_A}{\delta \theta}\right)$$

es decir $\quad \partial_\mu j^\mu = \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta}$

(vector) $\quad \dfrac{\delta q}{\delta \theta_A} = -i T^A q(x) \;, \qquad \dfrac{\delta \bar{q}}{\delta \theta_A} = +i \bar{q}(x) T^A$

(axial) $\quad \dfrac{\delta q}{\delta \theta^5_A} = -i \gamma_5 T^A q(x) \;, \qquad \dfrac{\delta \bar{q}}{\delta \theta^5_A} = -i \bar{q}(x) T^A \gamma_5$

$$\left.\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta_A}\right|_{vector} = -i \bar{q} [T^A, M] q = \partial_\mu V^\mu_A(x)$$

$$\left.\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta^5_A}\right|_{axial} = i \bar{q} \{T^A, M\} \gamma_5 q = \partial_\mu A^\mu_A(x)$$

Donde se ve que si $\; m_i = m_j \quad \partial_\mu V^\mu_A = 0$

y si además $\; m_i = 0 \quad \partial_\mu A^\mu_A = 0$.

También interesa obtener los conmutadores de estas corrientes a igual tiempo (llamado álgebra de corrientes). Las corrientes son de la forma

$J(x) = q^\dagger_{(x)} T\, q(x) \qquad T$ una matriz en Dirac, color y sabor

$\{q_i, q_j\} = 0$

utilizando $\quad \{q_i(x), q^\dagger_j(x)\}\, \delta(x^0 - y^0) = \delta_{ij}\, \delta(x-y)$

es inmediato que

$$\delta(x^0-y^0)\,[J(x), J'(y)] = q^\dagger(x)\,[T, T']\, q(x)\, \delta^{(4)}(x-\cancel{x})$$

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$
$$\{AB, C\} = A\{B,C\} - \{A,C\}B$$

Así

$$\delta(x^0-y^0)\,[V_A^\mu(x), V_B^0(y)] = \delta(x^0-y^0)\,[q^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu T_A q(x), q^\dagger(y) T_B q(y)]$$

$$= q^\dagger(x)\,[\gamma^0\gamma^\mu T_A, T_B]\,q(x)\,\delta^{(4)}(x-y)$$

$$= \bar{q}\gamma^\mu [T_A, T_B]\, q(x)\,\delta^{(4)}(x-y)$$

$$= i f_{ABC}\,\bar{q}\gamma^\mu T_c\, q(x)\,\delta^{(4)}(x-y) = \cancel{i f_{ABC}\bar{q}\gamma^\mu}\; i f_{ABC} V_c^\mu(x)\,\delta(x-y)$$

análogamente

$$\delta(x^0-y^0)\,[V_A^\mu(x), A_B^0(y)] = i\,\delta(x-y)\, f_{ABC}\, A_c^\mu(x)$$

$$\delta(x^0-y^0)\,[A_A^\mu(x), V_B^0(y)] = i\,\delta(x-y)\, f_{ABC}\, A_c^\mu(x)$$

$$\delta(x^0-y^0)\,[A_A^\mu(x), A_B^0(y)] = i\,\delta(x-y)\, f_{ABC}\, V_c^\mu(x)$$

Que fueron postuladas por Gell-Mann en 1964.

Para las cargas vector y axial

$$Q^A(t) = \int d^3x\, V_A^0(t,\vec{x}), \qquad Q_5^A(t) = \int d^3x\, A_A^0(t,\vec{x})$$

se tiene

$$[Q^A, Q^B] = i f_{ABC}\, Q^C$$

$$[Q^A, Q_5^B] = i f_{ABC}\, Q_5^C$$

$$[Q_5^A, Q_5^B] = i f_{ABC}\, Q^C$$

Si $m=0$ estas cargas son conservadas. Si $m_i = m_j$ Q_A es conservada pero no Q_5^A.

Definiendo $Q_R^A = \frac{1}{2}(Q^A + Q_5^A)$

$$Q_L^A = \frac{1}{2}(Q^A - Q_5^A)$$

se tiene

$$[Q_R^A, Q_R^B] = i f_{ABC} Q_R^C, \qquad [Q_L^A, Q_L^B] = i f_{ABC} Q_L^C$$

$$[Q_R^A, Q_L^B] = 0$$

que es el álgebra de $SU_R(N_f) \otimes SU_L(N_f)$

Q_R^A, Q_L^A son los generadores de

$$q_\alpha(x) \longrightarrow q'_\alpha(x) = e^{-i\theta^A T^A \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)} q_\alpha(x) \qquad (Q_R)$$

$$q_\alpha(x) \longrightarrow q'_\alpha(x) = e^{-i\theta^A T^A \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)} q_\alpha(x) \qquad (Q_L)$$

a diferencia de ~~[illegible]~~ las transformaciones vector y axial, las derecha - izquierda conmutan entre sí ya que $\frac{1+\gamma_5}{2}$ y $\frac{1-\gamma_5}{2}$ son proyectores ~~ortogo~~ ortogonales.

iv) $U_A(1)$

$q'(x) = e^{-i\theta\gamma_5 I} q(x)$, I unidad en todo (excepto Dirac) ~~cuando~~ cuando γ_5

con corriente $j^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q$. Es una simetría si $m_i = 0$. Esta simetría no sobrevive a la cuantificación.

Es anómala.