Mecánica Cuántica II

Tiempo: de 16:30 a 18:00

1. Dos partículas no relativistas de igual masa interaccionan entre sí a través de un potential $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Escribir el propagador $\langle \vec{x}_{1,f}, \vec{x}_{2,f}; t_f | \vec{x}_{1,i}, \vec{x}_{2,i}; t_i \rangle$ mediante la fórmula de integral de caminos de Feynman. [No se pide deducir la fórmula.]

2. Para hacer un promedio de tipo

$$\langle A \rangle = \frac{\int d^n x \rho(\vec{x}) A(\vec{x})}{\int d^n x \rho(\vec{x})}$$

mediante el método Monte Carlo, se usa un proceso markoviano $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2 \to \ldots$ donde cada nuevo punto se determina aleatoriamente con la regla

$$\mathrm{Prob}(\vec{x}_k \to \vec{x}_{k+1}) \propto f(\rho(\vec{x}_k), \rho(\vec{x}_{k+1}))\,.$$

Elegir la función $f(x,y)$ de modo que el método funcione correctamente.

3. Para calcular un promedio Monte Carlo con $\rho(x) = N e^{-\alpha x^2/2}$ ($x \in \mathrm{R}$) se usa la ecuación de Langevin. Para ello se ponen en marcha una gran cantidad de caminantes con cierta distribución inicial $P(x, t=0)$. Esta distribución $P(x,t)$ evoluciona de acuerdo con la ecuación de Fokker-Planck, y después de un transitorio se relaja (exponencialmente) a la distribución de equilibrio $\rho(x)$. Se pide calcular la vida media del transitorio. Esto requiere estudiar los modos propios ($P_n(x,t) \propto e^{-E_n t} = e^{-t/\tau_n}$) de la ecuación de Fokker-Planck (lo mejor es usar su versión hamiltoniana). Notar que $\rho(x)$ es el modo estacionario, $E_0 = 0$; el transitorio lo da el modo excitado de vida media más larga, E_1.

4. Considérese el espacio de Fok de partículas fermiónicas no relativistas de espín 1/2. Escribir el operador momento lineal expresado con operadores campo. Determinar si este operador corresponde al generador infinitesimal de las traslaciones espaciales estudiando su acción sobre los operadores campo. [Notar que los campos son operadores y por tanto se transforman como los observables bajo una transformación de simetría, y no como los vectores estado.]

5. En un espacio de Fok fermiónico extendido con variables de Grassman, calcular la integral

$$I = \int d\xi_1 d\xi_1^* \langle 0 | A^\dagger A | 0 \rangle$$

donde

$$A = f(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2)\,, \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

y a_1, a_2 son los operadores de aniquilación de los orbitales 1 y 2.

6. Se tiene una teoría bosónica, con grados de libertad ϕ^i,

$$Z = \int D\phi \, e^{-S[\phi]} \,, \qquad D\phi = \prod_i d\phi^i$$

con acción

$$S[\phi] = \frac{1}{2} m_{ij}\phi^i\phi^j + \frac{1}{4!} g_{ijk\ell}\phi^i\phi^j\phi^k\phi^\ell \,,$$

donde m_{ij} y $g_{ijk\ell}$, son tensores completamente simétricos. Enumerar los diagramas de Feynman conexos de Z hasta segundo orden inclusive, así como sus factores de simetría. Aplicar las reglas de Feynman a uno de ellos. [No se pide demostrar el teorema de Wick, o las reglas de Feynman, sólo aplicarlas.]

7. El grupo $(\mathrm{R}^+, \cdot)$ de los números reales positivos con el producto, actúa como un grupo de simetría sobre el espacio de Hilbert de una partícula unidimensional restringida a moverse en el semieje positivo, $L^2(\mathrm{R}^+)$, a saber,

$$\alpha \in (\mathrm{R}^+, \cdot) \mapsto U(\alpha) \,, \qquad (U(\alpha)\psi)(x) = f(x,\alpha)\psi(x^\alpha)$$

(donde x^α quiere decir el número positivo x elevado a la potencia positiva α). Determinar f de modo que el operador $U(\alpha)$ sea unitario. Obtener el generador infinitesimal y ver si es autoadjunto. [Fórmula útil: $a^\epsilon = e^{\epsilon \log a} = 1 + \epsilon \log a + O(\epsilon^2)$.]