ÁLGEBRA LINEAL. Arquitectura Técnica. CURSO 2008–09.

Relación de Ejercicios n. 2

1. Decide cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, son subespacios vectoriales:
   - $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + 2z = 0\}$,
   - $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 = y\}$,
   - $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y = 0, x - z = 0\}$,
   - $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

2. Estudia si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

   (a) El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, con la suma y el producto por escalares usuales.

   (b) El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, con la suma y el producto por escalares usuales.

3. Comprueba si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes:

$$(a)\, \{(1, 2), (0, 3)\}, \qquad (b)\, \{(1, 2, 3), (0, -1, -3), (2, 3, 3)\},$$

$$(c)\, \{(1, -1, 0, 0), (-2, 0, 1, 3), (1, 1, 2, 3)\}, \qquad (d)\, \{(2, 3, 0), (1, 4, 7)\}.$$

4. Comprueba si las matrices siguientes forman un conjunto de vectores linealmente dependiente o linealmente independiente:

   (a) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\right\}$

   (b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

5. Determina si los siguientes conjuntos son una base en $\mathbb{R}^2$:
   (a) $\{(-1, 1), (2, 3), (0, 4)\}$, (b) $\{(2, -1), (2, -1)\}$, (c) $\{(1, 4), (2, -1)\}$.

6. Determina si los siguientes conjuntos son una base en $\mathbb{R}^3$:
   (a) $\{(-1, 1, 0), (5, 0, 3)\}$, (b) $\{(2, -1, 1), (0, 1, 0), (3, -2, 1)\}$, (c) $\{(4, 1, -2), (3, 1, -1), (-1, -1, -1)\}$.

7. Justifica que los siguientes conjuntos son un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y halla una base de cada uno de ellos:

   (a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,
   (b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 4x_3 = 0\}$,
   (c) $U_3 = L((5, 5, 0), (-4, -4, 0))$,
   (d) $U_4 = L((1, 2, 0), (-1, 0, 2), (1, 1, 1))$.

8. Halla las ecuaciones cartesianas de los subespacios U_3 y U_4 del ejercicio anterior.

9. Halla una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 = x_2 - 3x_3; x_3 = x_4\}.$$

10. Sea el subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$U = L\left((1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\right).$$

(a) Halla, para los distintos valores de a, la dimensión de U, encontrando una base en cada caso.

(b) ¿Es en algún caso $U = \mathbb{R}^3$?

(c) Para $a = -2$, ¿el vector $(1,2,3)$ pertenece a U?

(d) Relaciona los resultados anteriores con el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Calcula las coordenadas del vector $(3,-2,2)$ respecto de cada una de las bases siguientes:

$$B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\}, \qquad B_2 = \{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}.$$

Calcula también las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 y viceversa.

12. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U = L\left((2,0,-1),(1,2,0),(0,4,1)\right) \quad ; \quad W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{r} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}.$$

Calcula bases y ecuaciones cartesianas de los subespacios $U \cap W$ y $U + W$.

13. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y + t = 0\right\} \quad ; \quad W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{r} x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{array}\right\},$$

calcula las dimensiones y da bases de U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

14. Sean U y W subespacios de $\mathbb{R}^3$. Demuestra en cada caso que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

(a) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = y = z\right\}$ y $W = \left\{(0,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;/\; b,c \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y + z = 0\right\}$ y $W = \left\{(t,2t,3t) \in \mathbb{R}^3 \;/\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

15. Sean los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que las ecuaciones paramétricas de U son

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{array} \right.$$

y la ecuación cartesiana de W es $x - y + 2z = 0$. Se pide

(a) Bases de U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

(b) Ecuaciones cartesianas de $U \cap W$.

(c) Base de un subespacio suplementario de $U + W$.

(d) Coordenadas de $(2,3,5)$ respecto de la base de $U + W$ obtenida en el primer apartado.

16. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$U_1 = L((0,2,1,0),(0,1,-1,0),(0,1,1,0))$$

$$U_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{r} z + t = 0 \\ 2z - t = 0 \end{array}\right\}$$

$$U_3 = \left\{(0,-\beta,0,\alpha+\beta) \;/\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Calcula

(a) $U_1 \cap U_2$.
(b) $U_1 + U_2$.
(c) ¿Son U_1 y U_2 suplementarios?
(d) Una base de $U_2 \cap U_3$.
(e) Unas ecuaciones cartesianas de $U_1 + U_3$.

17. Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $(0, 2, -1, 1, 0)$, $(0, 3, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, -2, 1)$. Obtén un subespacio suplementario.

18. Extiende el conjunto $S = \{(1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 1)\}$ para formar una base de $\mathbb{R}^4$.

19. Calcula la matriz de Gram del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base

$$B = \{(1, 1, 2), (3, 1, 1), (-2, -1, 2)\}.$$

20. Calcula la matriz de Gram respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ del producto escalar definido por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 6x_1y_1 + 11x_2y_2 + 9x_3y_3 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2.$$

¿Qué diferencia hay con la matriz del ejercicio anterior?

21. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio $U = L((2, 1, 5, -1), (-1, 1, 2, 0))$. Calcula una base de $U^\perp$.

22. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, ortonormaliza la base

$$B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}.$$

23. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, calcula una base ortonormal a partir de los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$.

24. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, halla una base ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuación cartesiana $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

25. Sean v, w dos vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal B son $v = (1, 1, -1)_B$, $w = (1, 0, 1)_B$. Halla las coordenadas de la familia de vectores ortogonales a ambos.

26. Descompón el vector $(1, 3, -1, 4)$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio generado por $\{(2, 1, 0, 1), (0, 3, 1, 1)\}$ y el otro ortogonal a dicho subespacio.

27. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera el subespacio

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{c} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array} \right\}.$$

Calcula unas ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.

28. En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, el producto escalar tiene matriz de Gram

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

respecto de una determinada base B. Sea U el subespacio de V que respecto de la base B tiene ecuaciones cartesianas

$$U = \left\{ (x, y, z)_B \in V \;/\; \begin{array}{c} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}.$$

Calcula $U^\perp$.

29. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se considera el subespacio U generado por los vectores $u_1 = (1,-1,1,-1)$, $u_2 = (1,1,1,1)$ y $u_3 = (1,-1,-1,-1)$.

    (a) Calcula el complemento ortogonal $U^\perp$ de U dando una base y unas ecuaciones cartesianas.

    (b) Halla una base ortonormal de U.

    (c) Halla la proyección ortogonal del vector $(1,2,3,4)$ sobre U y sobre $U^\perp$.

30. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, calcula la proyección del vector $(1,0,0)$ sobre el subespacio

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y=0\right\}.$$

31. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{r} x-y+z-2t=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}.$$

    Calcula $U^\perp$ y obtén las proyecciones ortogonales sobre U y sobre $U^\perp$ del vector $(1,1,1,1)$.

32. Calcula la matriz de Gram, respecto de la base B, del producto escalar dado por:

$$\langle v,w\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$$

    donde (x_1,x_2,x_3) y (y_1,y_2,y_3) son las coordenadas en la base B de v y w respectivamente. ¿Es la base B ortogonal? En caso negativo, calcula una base ortogonal a partir de B.

33. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual,

    (a) Calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1,2,1)$ sobre el subespacio $L((0,1,2),(1,2,3))$.

    (b) Si llamamos $d(v,U) = \text{mín}\{\|v-u\| \;/\; u \in U\}$, ¿cuánto vale $d(v,U)$ siendo v y U los del apartado anterior?

34. En un espacio vectorial eucldeo V se consideran dos vectores unitarios u y v que forman un ángulo de 60 grados. Calcula $\|2u+v\|$.

35. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x+y+z=0\right\}.$$

    Calcula la proyección ortogonal del vector $(0,1,1,1)$ sobre U y sobre el ortogonal de U.

36. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual $\langle\ ,\ \rangle$, se define

$$[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = \langle(x_1+x_3, x_1+x_2, x_2+x_3),(y_1+y_3, y_1+y_2, y_2+y_3)\rangle.$$

    (a) Comprueba que $[\ ,\ ]$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

    (b) Calcula la matriz de Gram para este producto escalar con respecto de la base canónica.

    (c) Calcula una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con respecto de este producto escalar.