	MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMIA II G.E.C.O. Curso 2012/2013	**Relación de Ejercicios** N^o 1

1. Dada la función $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x^2 - 6y^2$

   a) Hallar los puntos críticos de f.

   b) Averiguar si los puntos hallados anteriormente son máximos o mínimos locales. ¿Son globales?

2. Estudia y resuelve, si es posible, los siguientes problemas de optimización con restricciones de igualdad utilizando el método de sustitución.

$$(a)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} & x+2y=4 \end{array}} \qquad (b)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & x+y \\ \text{s.a.} & \mathrm{Ln}\,(x^2+y)=0 \end{array}}$$

$$(c)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & x^2+3y^2+z^2 \\ \text{s.a.} & x-y+2z=0 \end{array}} \qquad (d)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & x^2+3y^2+z^2 \\ \text{s.a.} & x-y+2z=0 \end{array}}$$

3. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas de optimización, justificando, cuando sea posible, que se trata de óptimos globales:

$$(a)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & x^3+2y^2 \\ \text{s.a.} & x^2+2y^2=4 \end{array}} \qquad (b)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & x^2+y^2-2xy \\ \text{s.a.} & x^2+y^2=8 \end{array}}$$

$$(c)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & x^2+2y^2-xy \\ \text{s.a.} & 2x+y=22 \end{array}} \qquad (d)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & -3x^2+12y \\ \text{s.a.} & x-y=1 \end{array}}$$

$$(e)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & 3xy \\ \text{s.a.} & 2x-3y=1 \end{array}} \qquad (f)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} & xy=1 \end{array}}$$

4. Un alumno decide resolver por *sustitución* el primer ejercicio del apartado anterior,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & x^3+2y^2 \\ \text{s.a.} & x^2+2y^2=4 \end{array}}$$

   Para ello, despeja $2y^2 = 4 - x^2$ y trata de maximizar la función $\phi(x) = x^3 + (4-x^2) = x^3 - x^2 + 4$, con $x \in \mathbb{R}$. Esta función $\phi(x)$ no tiene máximo global en $\mathbb{R}$, ya que toma valores tan grandes como se quiera. Sin embargo, se puede asegurar que el problema original tiene máximo global, por ser compacto el conjunto factible. ¿Dónde está el "fallo" del alumno? ¿Cómo resolverías el problema por sustitución, pero sin fallos?

5. Resuelve por el método gráfico el problema

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & (x+1)^2+y^2 \\ \text{s.a.} & x^3-y^2=0 \end{array}}$$

El punto óptimo obtenido, ¿es un punto estacionario?

6. Dado el problema

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & 4x^2+y^2 \\ \text{s.a.} & 2x+y=5000 \end{array}}$$

(a) Resuelve el problema.

(b) Indica el valor del multiplicador λ asociado a la solución óptima.

(c) Si se incrementa en una unidad el término independiente de la restricción, ¿en qué cuantía aumentará o disminuirá, aproximadamente, el valor óptimo?

7. Determina el valor de a para que el punto $(1,1)$ sea solución del problema

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar}: & -(x-a)^2-(y-1)^2 \\ \text{s.a.} & x^2+y^2=2 \end{array}}$$

8. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas de optimización:

(a) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & x^2+y^2+2z^2+4 \\ \text{s.a.} & x+y+z=10 \end{array}}$$

(b) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & x+y+z \\ \text{s.a.} & x^2+y^2+z^2=12 \end{array}}$$

(c) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar}: & x+4y+3z \\ \text{s.a.} & x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2=9 \end{array}}$$

(d) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & xy+z \\ \text{s.a.} & x^2+y^2+z^2=1 \end{array}}$$

(e) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & x+y+z \\ \text{s.a.} & x^2+y^2+z^2=1 \\ & x-y-z=1 \end{array}}$$

(f) $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & x+y \\ \text{s.a.} & x^2+2y^2+z^2=1 \\ & x+y+z=1 \end{array}}$$

9. (Febrero 2011) Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & x^2+2y^2+z^2 \\ \text{s.a.} & x-y-z=1 \end{array}}$$

$a)$ Resolver el programa por el método de sustitución.

$b)$ Calcular los puntos estacionarios del programa y comprueba si son puntos regulares. Justifica razonadamente si alguno de ellos es mínimo global.

$c)$ Estima el valor del mínimo si la restricción pasa a ser $x-y-z=7$.

10. (Septiembre 2011) Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & x^2+y^2-2xy+z^2 \\ \text{s.a.} & x^2+y^2+z^2=4 \end{array}}$$

a) Calcula los puntos estacionarios.

b) Comprueba si los puntos hallados son puntos regulares. Justifica razonadamente si alguno de ellos es extremo global.

c) Estima el valor máximo cuando la restricción pasa a ser $x^2+y^2+z^2=6$.

d) ¿ Es posible transformar este problema en otro equivalente sin restricciones?

Aplicaciones a la Economía

11. Una empresa produce un determinado bien a partir de dos factores productivos. Sea $Q(x,y)=5x+2y$ la función de producción de la empresa y $C(x,y)=8x^2+4y^2$ la función de costes. Determina las cantidades de factores x e y con las que se minimiza el coste al producir 33 unidades de producto.

12. (Septiembre 2010) Si se gastan x miles de euros en mano de obra e y miles de euros en equipo, la producción de cierta fábrica será $Q(x,y)=60\,x^{1/3}\,y^{2/3}$ unidades. Se debe maximizar la producción cuando hay 120000 euros disponibles que deben utilizarse completamente.

    a) Plantea el problema asociado.

    b) ¿Hay puntos singulares? ¿Posee máximo global?

    c) ¿Cómo debe distribuirse el dinero, entre mano de obra y equipo, para generar la mayor producción posible?. Calcula el valor de la misma.

    d) Halla un valor aproximado de lo que aumentaría la producción máxima si se dispusiera de 3000 euros más.

13. Un determinado producto se obtiene a partir de tres materias primas, X,Y,Z. La función de costes total de dicho producto , en millones de euros, es

$$C(x,y,z)=2x^3+xy-2z-3x+8,$$

donde x,y,z son las toneladas necesarias de las materias primas X,Y,Z respectivamente. Para mantener un buen nivel de calidad se requiere que la cantidad empleada de materia prima X debe ser un tercio de la empleada de Z, la cual debe ser el doble de la cantidad de Y.

Si se desea minimizar el coste, ¿qué cantidades de las materias primas X,Y,Z deberán utilizarse para elaborar el producto? Calcula el multiplicador de Lagrange asociado al óptimo e interpreta el resultado.

14. En una empresa la función de costes totales es

$$C(x,t)=25x+20xt+t^2,$$

donde x es el número de máquinas a utilizar y t el número de horas que funciona cada máquina. Si se desean producir 64.000 unidades al día y cada máquina produce 800 unidades por hora:

- ¿Cuántas máquinas serán necesarias para minimizar los costes totales?
- ¿Cuántas horas deberá funcionar cada máquina?
- Calcula aproximadamente el coste mínimo de fabricar 64.002 unidades.

15. Las ventas de un bien dependen del capital , x, invertido en publicidad, del capital y destinado a la distribución, así como del precio del producto, p, según la función

$$V(x,y,p) = \frac{-10p^3 + 2xyp^2}{1000}$$

Calcular el precio al que debe venderse dicho bien y el capital que debe invertirse en publicidad y distribución para obtener la mayor cifra de ventas posible, considerando que se dispone de un presupuesto de 60 u.m. que hay que agotar y que las variables x, y, p son no nulas.

Estimar de forma aproximada el valor de las ventas máximas si se dispusiese de un presupuesto de 61 u.m.

16. Una persona cuya renta es de 1.000 u.m. compra diferentes cantidades de tres bienes, A, B, C, cuyos precios unitarios son, respectivamente $10, 12$ y 6 u.m.

   - Calcular las cantidades q_A, q_B, q_C, que optimizan su utilidad dada por la función

   $$U(q_A, q_B, q_C) = q_A + 12\ln(q_B.q_C).$$

   - Determina cuál será la utilidad máxima que alcanzará dicha persona.
   - Interprete el multiplicador de Lagrange.

17. La función de utilidad de un individuo viene dada por

$$U(x,y,z) = 2xy + 4z,$$

donde x, y, z representan las cantidades consumidas de los bienes, X, Y, Z respectivamente. Considerando que la suma de las cantidades consumidas de los bienes X, Y debe ser 8 y la suma de las cantidades consumidas de los bienes Y, Z debe ser 7:

   - Calcule las cantidades a consumir de cada bien para optimizar la utilidad.
   - Determine la máxima utilidad
   - ¿Cuál será el valor aproximado de la utilidad máxima si la suma de las cantidades consumidas de los bienes X, Y debe ser 9 y la suma de las cantidades consumidas de los bienes Y, Z debe ser 8. Compare el resultado con el valor exacto.
   - ¿Qué ocurre si si la suma de las cantidades consumidas de los bienes X, Y debe ser 8,1 y la suma de las cantidades consumidas de los bienes Y, Z debe ser 6,8?

18. El propietario de un chalet desea cercar parte de su terreno para dedicarlo al cultivo de hortalizas. Para ello decide utilizar el espacio situado en uno de los laterales del chalet, de modo que se emplee toda la pared, de 10 m de largo, como parte de la cerca.Si se desea que el recinto sea una superficie de 144 m^2 y el metro de valla cuesta 120 u.m.

   - ¿ Cuántos metros de valla deberá comparar si pretende minimizar el coste?
   - ¿ Cuánto le costará cercar la huerta?

19. (Febrero 2010) La producción de un artículo viene dada por

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

donde x, y, z representan las cantidades de cada uno de los tres factores productivos utilizados. Si la utilidad que obtiene la empresa con la venta del producto es

$$U(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

a) Formula el programa para determinar las cantidades de cada factor productivo que maximizan la utilidad cuando la producción es de 16 unidades.

b) Calcula los puntos estacionarios del programa. Comprueba si son puntos regulares.

c) Determina la utilidad máxima.

20. (Septiembre 2012) La utilidad de un consumidor viene dada por la función

$$U(x, y) = 4 \ln x + 2 \ln y$$

con x, y las cantidades consumidas de los bienes A y B resp. Se pide:

a) Resolver por el método de sustitución el problema de maximizar la utilidad bajo la restricción presupuestaria $x + 3y = 36$.

b) Calcula el multiplicador de Lagrange asociado al máximo y calcula el valor aproximado de la utilidad máxima si el presupuesto fuese de 33 u.m.