1. Considérese el siguiente programa con restricciones de desigualdad:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & 3x - x^3 \\ \text{s.a.} & 0 \leq x \leq 3. \end{array}}$$

   *a*) Formular las condiciones de Kuhn-Tucker.
   *b*) Encontrar todos los puntos que verifiquen las condiciones de Kuhn-Tucker.
   *c*) Razonar si los puntos obtenidos son solución óptima del problema.
   *d*) Interpretar gráficamente las condiciones de Kuhn-Tucker en el óptimo.

2. Resolver los programas siguientes, justificando previamente la existencia de extremos globales.

$$(a)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & 2x^2 + y^3 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}} \qquad (b)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & x^2 + 4y^2 - 2xy \\ \text{s.a.} & x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{array}}$$

3. Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & x^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a.} & x + y \leq 6, \\ & 2x + y \geq 4, \\ & x, y \geq 0. \end{array}}$$

   Determinar qué restricciones saturan los puntos $(2,3)$, $(2,0)$, $(3,3)$. Resolverlo gráficamente y determinar qué restricciones se saturan en el máximo global y en el mínimo global.

4. Dados los programas siguientes:

$$(a)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & (x+3)^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & -x^3 + y \leq 0 \\ & -x^3 - y \leq 0 \end{array}} \qquad (b)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & y^2 - x \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{array}}$$

$$(c)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & xy \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & y \leq x \end{array}} \qquad (d)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & -x^2 - y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \leq 1 \\ & y \geq x \\ & x \geq 0 \end{array}}$$

$$(e)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & xy \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 2 \\ & y \geq 0 \\ & x \geq y \end{array}} \qquad (f)\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & -(x-4)^2 - y^2 \\ \text{s.a.} & x + y \geq 2 \\ & x - y \leq 2 \\ & y^2 \leq x + 4. \end{array}}$$

   Resolverlos gráficamente. Analizar si el óptimo hallado verifica la condición de regularidad. ¿Satisface dicho óptimo las condiciones necesarias de Kuhn- Tucker?.

5. Analizar si se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker en los puntos $\overline{a} = (-5, -2)$ y $\overline{b} = (0, 3)$ para el programa:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & 2x + y \\ \text{s.a.} & x + y \leq 3 \\ & -x + y \leq 3 \\ & x \leq 2, y \geq -2 \end{array}}$$

6. Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & y - x^2 \\ \text{s.a.} & x^2 - y \leq 0, \\ & x, y \geq 0 \end{array}}$$

Comprobar que el punto $(1, 1)$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker y es mínimo global del programa.

7. Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar}: & 2 - (x-1)^2 - e^{y^2} \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}}$$

¿Es un programa convexo?. Demostrar que el programa tiene máximo global y calcularlo usando las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿ Tiene mínimo global?.

8. Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar}: & x^3 + 3 \\ \text{s.a.} & 2x - y - 1 \leq 0, \\ & -2x + y^2 - 1 \leq 0 \end{array}}$$

Probar que no es un programa convexo. Demostrar que el programa tiene mínimo global. ¿ Tiene máximo global?.

9. Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & 4x + 4y - 12 \\ \text{s.a.} & (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 8, \\ & x - y \leq 5 \end{array}}$$

   *a*) Resolver el programa gráficamente.
   *b*) Comprobar si $(4, -1)$ es un punto regular del conjunto factible. ¿Verifica las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker de máximo local?.
   *c*) Analiza la convexidad del programa.

10. Dado el programa

$$\begin{array}{|ll|}\hline \text{Minimizar :} & a(x^2+y^2) \\ \text{s.a.} & x^2+y^2 \le 25, \\ & x+2y \le 10, \\ & x,y \ge 0. \\ \hline \end{array}$$

¿Para qué valores de $a$ el punto $(0,0)$ es solución del problema?. Resolver el programa para el caso $a < 0$.

11. Dado el programa

$$\begin{array}{|ll|}\hline \text{Maximizar :} & \ln(x\,y) \\ \text{s.a.} & (x-2)^2+(y-2)^2 \le 2 \\ & x+y \ge 4 \\ \hline \end{array}$$

   *a*) Comprueba si los puntos $(2,2)$ y $(3,3)$ son vértices o puntos extremos del conjunto factible.
   
   *b*) Analizar si es un programa convexo.
   
   *c*) Resolver el programa gráficamente.

12. Dado el programa

$$\begin{array}{|ll|}\hline \text{Minimizar :} & x^2-y \\ \text{s.a.} & x^2+y^2 \le 4 \\ & y \ge 1 \\ \hline \end{array}$$

   *a*) Comprobar si $(0,2)$ es un punto regular.
   
   *b*) ¿Satisface las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker de mínimo local?
   
   *c*) Justificar razonadamente dónde se alcanza el mínimo global.

**Aplicaciones a la Economía**

13. La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y) = x^{1/3}y^{1/2}$, donde $x$, $y$ representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un período de tiempo dado. Sean $p_1$, $p_2$ los precios unitarios de cada uno de los bienes y $M$ la cantidad de dinero que el individuo posee. Calcular las cantidades a consumir de cada uno de los bienes, en función de los parámetros $p_1$, $p_2$ y $M$ que maximizan la utilidad .

14. Una empresa produce un bien en competencia perfecta. La función de producción del bien es $Q(K,L) = 8K^{0,25}L^{0,5}$ . Los precios de los factores capital y trabajo son 2 y 4 u.m ., respect. Calcular los niveles de capital y trabajo que minimizan el coste cuando la producción debe ser de al menos $Q_o$ unidades.

15. Un proceso productivo transforma dos inputs en cantidades $x$, $y$ en dos productos en cantidades $q_1$, $q_2$, siguiendo las relaciones:

$$q_1 = x(3-x)+y,$$

$$q_2 = x^2+y^2.$$

La utilidad de este proceso es $U(x,y) = x^2+y$ . Si por restricciones de mercado sabemos que siempre se deben obtener al menos 2 unidades de $q_1$ y nunca más de 4 de $q_2$, ¿ cuáles serán las cantidades $x$, $y$ que maximimizan la utilidad?.

16. Un inversor dispone de 20 u.m. que desea dedicar a inversión o ahorro. Se le ofrece la posibilidad de invertir las cantidades $x$,$y$,$z$ en tres activos $A$,$B$,$C$ cuyos rendimientos unitarios esperados son 2,5 y 4 resp. El riesgo en que incurre si realiza la inversión es

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2.$$

Determinar el plan de inversión óptimo si el individuo desea obtener un rendimiento total de al menos 61 unidades, asumiendo el mínimo riesgo. ¿Qué cantidad dedica a ahorrar?.