Universidad de Granada	**MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMIA II** G.E.C.O. Curso 2012/2013	**Relación de Ejercicios** Nº 3

1. Resolver los siguientes programas lineales primero gráficamente y después por el método del simplex.

(a)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & Z = x + y \\ \text{s.a.} & -x + y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & 5x + y \\ \text{s.a.} & 3x - 2y \leq 6 \\ & -2x + y \leq 2 \\ & x,\ y \geq 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solución: (a) La solución óptima es $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $(s_1 = 2,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0)$. *El valor óptimo es* 4. *(b) No tiene solución óptima (no acotada). (c) Solución múltiple: existen tantas soluciones como puntos tiene el segmento que une* $P = (3/5, 8/5)$ *con* $Q = (6/5, 6/5)$, *es decir,* $(x, y) = \frac{1}{5}(3 + 3t, 8 - 2t),\ t \in [0, 1]$.

2. Resuelve los siguientes problemas por el método del simplex

(a)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & Z = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & Z = 7x + 10y + 4z \\ \text{s.a.} & 3x + 5y + 4z \leq 30 \\ & 3x + 2y \leq 4 \\ & x + 2y \geq 8 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar :} & 60x_1 + 0x_2 + 90x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_3 - 2x_4 \leq 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & -3x - 4y + z \\ \text{s.a.} & x + y + z \geq 4 \\ & x + y \leq 5 + 2z \\ & x + 2y + 5z \leq 9 \\ & x, y, z \geq 0. \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar :} & 5x + 3y + z \\ \text{s.a.} & x + z \leq 100 \\ & x + 2z \geq 200 - y \\ & x - z \geq 0, \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Solución: (a) El máximo global está en $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, *y el valor máximo es* 2. *(b) no tiene solución. (c)* $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, *valor máximo:* 600, *(d) El mínimo global se alcanza cuando* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, *el valor mínimo es* -1. *(e)* $x = 1, y = 4, z = 0$, *el valor mínimo es -19. (f) La solución óptima es:* $x = 50$, $y = 50$, $z = 50$, $(s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0)$. *El valor óptimo es* 450.

3. Al resolver programas diferentes de maximización por el algoritmo del simplex se ha llegado a las siguientes tablas. Cada una de ellas describe una de las siguientes situaciones

   a) Es una tabla final que muestra una solución óptima del problema.

b) Es una tabla final que muestra que el problema no tiene solución óptima.

c) No es una tabla final, ya que se puede obtener una nueva (y mejor) S.F.B. pasando a una nueva tabla.

Relacione cada una de las tablas con cada una de las situaciones anteriormente descritas.

[Tabla A] V. bás.	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_2	3	-1	0	3	1	3
x_3	-1	1	1	2	0	5
	-4	3	0	0	0	$f = 10$

[Tabla B] V. bás.	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_2	1	3	0	-1	1	3
x_3	-1	2	1	-2	0	5
	-1	0	0	3	0	$f = 10$

[Tabla C] V. bás.	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_2	1	3	0	-1	1	3
x_3	-1	2	1	-2	0	5
	-1	0	0	-3	0	$f = 10$

4. Al resolver varios programas diferentes de maximización por el algoritmo del simplex se ha llegado a las siguientes diferentes tablas (no necesariamente finales). Diga qué se puede deducir en cada uno de los casos, indicando por qué.

[Tabla A] V. bás.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	1	3	0	-1	1	3
x_3	-1	2	1	-2	0	5
	-1	0	0	3	0	$f = 10$

[Tabla B] V. bás.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	1	3	0	-1	1	3
x_3	-1	2	1	-2	0	5
	-1	0	0	-3	0	$f = 10$

En las dos tablas siguientes a es una variable artificial

[Tabla C]		1	2	1	3	$-M$	
	V. bás.	x_1	x_2	x_3	x_4	a	
$-M$	a	1	-3	0	-1	1	3
1	x_3	-1	2	1	-2	0	5
		$-M$	$-3M$	0	$5-M$	0	$f = (-3M+5)$

[Tabla D]		$0{,}5$	2	1	-5	$-M$	
	V. bás.	x_1	x_2	x_3	x_4	a	
2	x_2	1	1	0	-1	3	3
1	x_3	-1	0	1	-2	2	5
		$-0{,}5$	0	0	-1	$-M-8$	$f=11$

Solución: [A]: El programa tiene óptimo no acotado. [B]: La solución actual es óptima, pero hay solución óptima múltiple. [C]: El programa no tiene soluciones factibles. [D]: La solución actual es óptima, y es la única solución óptima del programa.

Aplicaciones a la Economía

5. Una entidad financiera planifica sus operaciones para el próximo año. La entidad concede tres clases de préstamos cuyos tantos de rendimiento son: Préstamo personal al 14 % , préstamo hipotecario al 10 % y préstamo para la compra de automóviles al 12 %.

   La política de la entidad impone ciertas restricciones sobre el reparto de los montantes en las diferentes categorías. Los préstamos personales no deberán exceder el 25 % del presupuesto de la entidad, mientras que los préstamos personales e hipotecarios conjuntamente no deberán exceder el 45 % del presupuesto.

   El montante concedido a los préstamos para automóviles no deberá superar el 70 % del presupuesto pero será por los menos el 80 % del presupuesto concedido a los préstamos de personal e hipotecario. La compañía tiene un presupuesto de 500.000 u.m.

   Determinar el reparto óptimo del presupuesto para maximizar el rendimiento.

6. Tres alimentos, A, B y C, se componen básicamente de proteínas e hidratos de carbono, en las cantidades siguientes:

	Proteínas	Hid. de carb.
A	12	8
B	6	3
C	9	2

   Si diariamente se necesitan un mínimo de 60 unidades de proteínas y un máximo de 25 unidades de hidratos de carbono, calcúlense las cantidades de los alimentos A, B y C que minimizan el coste de la dieta, sabiendo que cada uno de ellos cuesta, respectivamente, 40, 20 y 30 u.m. por unidad.

   Solución: La dieta de coste mínimo está compuesta por 35/16 unidades de A, 15/4 de C y nada de B. Aunque existen otras soluciones igualmente óptimas (solución óptima múltiple)

7. Una empresa elabora tres productos A,B y C en cantidades diarias x, y, z. Los costes de fabricación son respect. 4, 6 y 3 u.m. El tiempo requerido en la elaboración de cada unidad de producto, la cantidad de materias primas necesarias y las disponibilidades de ambos factores, vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A	B	C	Disponiblidad
Materias primas	3	2	5	1000
Tiempo	5	20	10	800

Determine las cantidades de A, B, C que hay que producir para minimizar los costes si se han de fabricar al menos 100 unidades diarias. Calcular el coste mínimo. ¿Ha sido necesario agotar las materias primas y las horas disponibles para conseguir el mínimo coste?

8. Un inversionista desea invertir en Bolsa y en la actualidad hay tres sectores interesantes: Eléctricas, con rendimiento aproximado del 4 %, Bancos, con 5 % de interés, y Servicios, al 9 % de interés. Dispone de 200 millones de pesetas y un experto le ha aconsejado que no invierta en Eléctricas más de la mitad de la inversión total y que en Bancos invierta al menos 70 millones de u.m. Debido a que las acciones de Servicios tienen un mayor riesgo, le sugiere además que la inversión en este sector no supere los 40 millones de u.m.

   Suponiendo que emplea todo el capital disponible, explicar cómo debe distribuir su inversión para obtener un beneficio máximo.

   Sol: La solución es que se debe invertir 40 millones en Servicios y 160 millones en Bancos. La ganancia será de 11.6 millones.

9. Un inversor dispone de 50.000 euros para invertir en Bolsa en tres tipos de valores: bonos que proporcionan un 5 % de interés anual, acciones de riesgo medio con un un 8 % de interés anual y obligaciones especulativas de alto riesgo con un 16 % de interés anual. Para tener en cuenta el factor riesgo, el inversor decide no invertir más de 35000 euros entre acciones y obligaciones además de que la cantidad invertida entre bonos y obligaciones no supere los 30.000 euros. Determinar cuánto debe invertir en cada tipo de valores para maximizar sus intereses. ¿Para maximizar los intereses se ha invertido todo el capital disponible?

10. Una empresa farmacéutica debe enviar un total de un millón trescientas mil vacunas a sus filiales en París, Roma y Londres. La demanda exige que a París lleguen al menos 900.000 vacunas a Roma por lo menos 70.000 y a Londres 80.000.

    El coste de transportar una vacuna hasta París es de 100 euros, a Roma es de 200 y a Londres 500, además el transporte tiene unos costes fijos de 1.950.000 u.m. Determinar cuantas vacunas deben enviarse a cada ciudad si se pretende minimizar los costes.

11. Una empresa fabrica y comercializa tres productos, A, B y C, de los cuales el segundo está de promoción por lo que los beneficios unitarios generados por cada uno de ellos serán de 20, -2 y 4 resp. En el proceso de fabricación los productos han de pasar por dos talleres. La cantidad requerida por unidad de producto en cada taller,junto con la disponible, aparecen en el siguiente cuadro:

	A	B	C	Capacidad diaria
Taller 1	2	4	8	32
Taller 2	2	2	0	16

    Estudiosos de mercado indican que la cantidad fabricada de B, ha de superar en al menos seis unidades a la producción de A más el doble de la producción de C. Determinar las cantidades de cada producto que maximizan el beneficio, si se supone que se vende toda la producción.

12. Una empresa fabrica tres tipos de máquinas A, B,C. Su función de beneficio es

$$B(x, y, z) = 3x + 4y - z$$

    donde x, y, z representan el número de máquinas del tipo A,B,C respectivamente. Las necesidades del mercado determinan que :

a) Han de fabricarse más de cuatro máquinas .

b) La suma del número de máquinas del tipo A y B no puede superar en más de 5 unidades al doble de las fabricadas del tipo C.

c) La fábrica dispone de 9 Tm de hierro. Sabiendo que el hierro que se utiliza en la fabricación de cada máquina es respectivamente $1, 2, 5$ Tm. Determinar cómo se debe realizar la producción para maximizar el beneficio. Calcula este beneficio máximo.

13. Una empresa fabrica tres productos A, B y C, para lo cual necesita tres materiales distintos M_1, M_2,M_3. En este momento se dispone en el almacén de 8 ,6 y 20 unidades de materiales resp. Las cantidades de cada material necesarias para fabricar cada unidad de producto vienen dadas por el siguiente cuadro:

	A	B	C
M_1	2	2	1
M_2	4	1	2
M_3	1	4	6

Si el beneficio unitario de cada uno de ellos es de 3 ,4 y 2 u.m., determine las cantidades que se han de fabricar para maximizar el beneficio.

14. Una fábrica de embarcaciones produce tres tipos de embarcaciones: lanchas con camarote, veleros de carrera y veleros de paseo. Comenzando sólo con el casco de fibra de vidrio y la cubierta, las embarcaciones se terminan en 2, 1 y 3 semanas, respectivamente. La fábrica cierra durante la última semana de diciembre. La ganancia unitaria neta para cada uno de los tipos de embarcación es de 5000, 4000, y 6000 euros, respectivamente. Debido a consideraciones de espacio, no se pueden terminar más de 25 embarcaciones en un año (51 semanas). Hallar el número de embarcaciones de cada tipo que interesa fabricar para maximizar la ganancia anual. Determinar qué cantidades de recursos disponibles no han sido utilizadas para la obtención del óptimo.

    Sol: 12 veleros de carrera y 13 de paseo al año. La ganancia máxima anual es de 126000 euros. Pero existe otra solución igualmente óptima, que es fabricar 24 lanchas con camarote y 1 velero de paseo. Y también es solución óptima cualquier punto del segmento determinado por las dos soluciones anteriores. Es decir, este problema tiene solución óptima de arista.

15. Una empresa fabrica tres productos de cara a San Valentín: anillos, brazaletes y pulseras que vende a 200, 300 y 500 euros respectivamente. En la siguiente tabla se indican los grs usados de cada uno de los materiales así como el número de horas necesarias para su acabado y la cantidad disponible de cada uno de los materiales.

	Oro	Plata	Acabado	Precio unitario
Anillo	1	0	1	2 u.m.
Brazalete	2	2	2	3 u.m.
Pulsera	1	1	2	5 u.m.
Existencias	20	12	35	

Plantea el correspondiente problema de programación lineal, resuélvelo por el algoritmo del simplex y responde a las siguientes cuestiones:

a) Comprueba si $(0, 6, 0)$ y $(6, 3, 1)$ son vértices del conjunto factible.

b) ¿cuántas soluciones tiene el problema? ¿cuántas unidades de cada producto deben fabricarse para obtener el máximo beneficio? ¿cuál es el máximo beneficio? cuántos gramos de oro han sobrado en el proceso de fabricación?