Universidad de Granada	**MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMIA II** G.E.C.O. Curso 2012/2013	**Relación de Ejercicios** Nº 4

ECUACIONES EN DIFERENCIAS (EED) LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Aplicaciones a la Economía

1. Consideremos una operación de amortización de un préstamo para una vivienda, a un tipo de interés nominal (anual) de un 5 %, de un capital de cuantía 200,000 euros. Supongamos además que se pagan letras mensuales de 700 euros.

   a) Escribir la ecuación en diferencias que describe la evolución en el tiempo del capital C_t pendiente de pago en cada periodo t.

   b) Esbozar gráficamente la evolución en el tiempo del capital pendiente de pago. ¿Crece?, ¿decrece?, ¿se mantiene constante?.

   c) Para que C_t no crezca indefinidamente, debemos pagar una "entrada" C_0' que amortice parte del capital total C_0, de manera que el nuevo capital inicial sea $C_0'' = C_0 - C_0'$. ¿Cuál debe ser como mínimo dicha amortización inicial C_0'?.

   d) Si amortizamos $C_0' = 33000$ euros, resuelve la ecuación en diferencias para C_t y proporciona la solución que da la cantidad pendiente de pago transcurridos t años.

   e) En esas condiciones, calcula el tiempo que se tarda en pagar la casa.

   f) ¿Cuántos intereses se pagaron el segundo y el penúltimo año?

2. Con los datos siguientes para el modelo de la telaraña (D: demanda, S: oferta, P: precio):

$$(a)\begin{cases} D_t = 5 - 3P_t \\ S_t = -2 + P_{t-1} \\ P_0 = 4 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} D_t = 4 - 2P_t \\ S_t = -5 + 3P_{t-1} \\ P_0 = 3 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} D_t = 6 - 2P_t \\ S_t = -4 + 2P_{t-1} \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

   obténgase:

   a) La trayectoria temporal del precio.

   b) La tendencia del precio a largo plazo.

   c) Las representaciones gráficas.

3. Consideremos el modelo del *multiplicador de la renta*. Supongamos que el consumo C en el periodo t depende de la renta Y en el periodo anterior $t-1$, esto es:

$$C_t = a + bY_{t-1},$$

   donde $a \geq 0$ es el denominado *consumo autónomo* y $b \in (0,1)$ es la *propensión marginal al consumo*. La condición de equilibrio del modelo es:

$$Y_t = C_t + I_t$$

   donde supondremos por simplicidad que la inversión I_t aumenta en el primer periodo y se mantiene constante en los siguientes, es decir, $I_t = I_0 + \Delta I = I \ \forall t \geq 1$.

   a) Escriba la ecuación en diferencias para la renta Y_t.

   b) Tomando $a = 300, b = 0{,}7, I_0 = 150, \Delta I = 100, Y_0 = 1500$, determine la solución que da la trayectoria temporal de la renta.

c) ¿Cuál es la renta a largo plazo?. Esboce gráficamente la solución.

4. *Modelo de Harrod.* Consideramos las siguientes variables,

$$\begin{cases} Y_t & = & \text{renta nacional} \\ I_t & = & \text{inversión total} \\ S_t & = & \text{ahorro total} \end{cases}$$

relacionadas entre sí por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (1) & S_t & = & \alpha Y_t \\ (2) & I_t & = & \beta(Y_t - Y_{t-1}) \\ (3) & S_t & = & I_t, \qquad \beta > \alpha > 0, \;\; \alpha < 1. \end{cases}$$

Se pide:

a) Sustituyendo unas en otras, encontrar una única EED (¿en qué variable?).

b) Resolver la EED del apartado anterior para el caso particular $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}6$.

5. La demanda en el mercado de un bien sigue una relación de la forma:

$$D_{t+2} = \frac{3}{2}D_{t+1} - \frac{1}{2}D_t$$

Estúdiese bajo qué condiciones iniciales D_0 la demanda D_t se estabiliza en el tiempo.

6. *Modelo de Samuelson.* La renta nacional Y_t producida durante un periodo de tiempo t determinado es igual a la demanda C_t de bienes de consumo más la demanda I_t de los bienes de inversión:

$$Y_t = C_t + I_t.$$

Supongamos que la demanda de bienes de consumo C_t es proporcional a la renta nacional del periodo anterior Y_{t-1}:

$$C_t = \alpha Y_{t-1},$$

donde $\alpha > 0$ es la "propensión marginal al consumo". Supongamos también que la demanda de bienes de inversión I_t es proporcional al incremento de la renta entre dos ejercicios anteriores:

$$I_t = \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \gamma,$$

donde $\beta > 0$ es el "coeficiente de aceleración" y γ es una inversión constante en cada periodo. Sustituyendo unas ecuaciones en otras, obtener una ecuación en diferencias para Y_t. ¿De qué orden es?. ¿Es lineal?. ¿Es homogenea?. Calcula la solución de dicha ecuación en diferencias para los siguientes datos:

a) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1, Y_0 = 1, Y_1 = 2.$

b) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, Y_0 = 0, Y_1 = 1.$

c) $\alpha = 1/2, \beta = 1/2, \gamma = 0, Y_0 = 0, Y_1 = 1.$

Otros ejercicios

7. Determina la solución general de la EED de orden 1

$$x_t - ax_{t-1} = b$$

con condición inicial $x_0 = 1$ en los siguientes casos:

a) $a = 2, b = 0$, b) $a = -2, b = 1$, c) $a = 1/2, b = 0$,

d) $a = -1/2, b = 1$, e) $a = 1, b = 0$, f) $a = 1, b = 1$, g) $a = -1, b = 2$,

Calcula en cada caso los puntos de equilibrio (puntos fijos) y dí si son estables o inestables. Esboza gráficamente la solución.

8. Calcula la solución de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 0.$$

que satisface las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.
Solución: $x_t = -1/2 + 3^t/2$.

9. Calcula la solución de la EED

$$4x_{t+2} + 4x_{t+1} + x_t = 1.$$

que satisface las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 0$.
Solución: $x_t = -\frac{1}{9}(-1/2)^k + \frac{1}{3}t(-1/2)^t + \frac{1}{9}$.

10. Calcula la solución de $x_t - \frac{3}{4}x_{t-1} + \frac{1}{8}x_{t-2} = 2$ con condiciones iniciales $x_0 = 0 = x_1$.
Solución: $x_t = \frac{32}{3}(1/4)^t - 16(1/2)^t + \frac{16}{3}$.

11. Calcula la solución general de la EED de orden 3 siguiente

$$x_{t+3} + x_t = 0$$

Solución: $x_t = C_1(-1)^t + C_2 \cos(t\pi/3) + C_3 \sin(t\pi/3)$.

12. Calcula la solución de $x_{t+3} = x_t$ con condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = 0 = x_2$.
Solución: $x_t = 1 + \frac{-2}{\sqrt{3}} \cos(\pi t/3)$.

13. Calcula la solución general de:

$$(a)\ x_{t+2} + x_t = 1 + t, \quad (b)\ x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 3^t, \quad (c)\ x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 2^t,$$
$$(d)\ x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 2^t + 1, \quad (e)\ x_{t+3} + 3x_{t+2} + 3x_{t+1} + x_t = 6^t.$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO's) LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

14. *Ajuste dinámico del precio de un bien en el mercado.* La demanda D y la oferta ("supply") S de un bien dependen del precio P en un determinado instante de tiempo t de la forma:

$$D(t) = a - bP(t), \quad S(t) = -c + dP(t),$$

con $a, b, c, d > 0$ ciertos parámetros económicos. El precio varía en función del exceso de demanda (hipótesis Walrasiana) como:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(D(t) - S(t)),$$

con $k > 0$ otra constante económica que da idea del ritmo de variación del precio. Obténgase:

- La trayectoria temporal del precio
- El precio a largo plazo

para los siguientes casos:

a) $a = 6, b = 2, c = 2, d = 4, k = 0{,}75, P(0) = 3$.

b) $a = 4, b = 6, c = 3, d = 2, k = 0{,}8, P(0) = 2/3$.

15. *(Raices reales y distintas)* Hallar la solución general $x(t)$ de la EDO $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$.
Solución: $x(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$

16. *(Raices reales dobles)* Hallar la solución general $x(t)$ de la EDO $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.
Solución: $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$

17. *(Raices complejas)* Hallar la solución general $x(t)$ de la EDO $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.
Solución: $x(t) = C_1e^{-t}\cos(2t) + C_2e^{-t}\sin(2t)$

18. *Modelo de mercado con expectativas de precios.* En este modelo la demanda y la oferta dependen del precio y sus derivadas de la forma:

$$D(t) = d_1 + d_2P(t) + d_3\frac{dP(t)}{dt} + d_4\frac{d^2P(t)}{dt^2},$$

$$S(t) = s_1 + s_2P(t) + s_3\frac{dP(t)}{dt} + s_4\frac{d^2P(t)}{dt^2},$$

donde $d_i, s_i, i = 1, 2, 3, 4$, son ciertos parámetros económicos. El precio varía ahora de manera que se satisfaga la condición de equilibrio $D(t) = S(t)$. Obténgase:

- La trayectoria temporal del precio
- El precio a largo plazo

para los siguientes casos:

a) $d_1 = 16, d_2 = -4, d_3 = -6, d_4 = 4, s_1 = -8, s_2 = 8, s_3 = 4, s_4 = 6, P(0) = 3, \dot{P}(0) = -5/2$.

b) $d_1 = 2, d_2 = -2, d_3 = 2, d_4 = 1, s_1 = -2, s_2 = 3, s_3 = 6, s_4 = 2, P(0) = 2, \dot{P}(0) = 1$.

19. Consideremos el siguiente modelo de crecimiento económico de un país en vías de desarrollo:

$$\begin{cases} x(t) &= \gamma k(t) \\ \dot{k}(t) &= \alpha x(t) + h(t) \end{cases}$$

donde $x(t)$ representa la *producción* anual , $k(t)$ es el *stock* de capital y $h(t)$ es el *flujo anual de ayuda exterior*, todo esto medido en el instante t.

a) De este modelo se puede deducir una EDO, ¿en qué variable?

b) Hallar la EDO que se deduce del anterior y dar la solución general cuando $h(t) = e^{-t}$

20. Hallar la solución general de la EDO $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = t$.
Solución: $x(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{5}t + \frac{4}{25}$.

21. Hallar la solución general de la EDO $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 20\cos(2t)$.
    Solución: $x(t) = e^{5t}(C_1 + C_2 t) + \frac{420}{841}\cos(2t) + \frac{400}{841}\sin(2t)$.

22. Hallar la solución general de la EDO $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$.
    Solución: $x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2)$.

23. Hallar la solución de $\ddot{x} + x = 4\cos t$ con condiciones iniciales $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$.
    Solución: $x(t) = 2\cos t - \sin t + 2t\sin t$

24. Hallar la solución general de la EDO $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = 2t + 10$.
    Solución: $x(t) = (c_1 t^2 + c_2 t + c_3)e^{2t} - \frac{1}{4}t - \frac{13}{8}$

25. Hallar la solución general de la EDO $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 2e^{-t}$.
    Solución: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{12}e^{-t}$

26. Hallar la solución general de la EDO $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 2e^t$.
    Solución: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - \frac{1}{4}t + te^t$