TEMA 1: PROGRAMAS CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Título de la nota 26/09/2011

MANUEL CALIXTO

Se trata de encontrar los valores de ciertas variables de decisión $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (por ejemplo: cantidades de n bienes de consumo, factores productivos, etc) que Maximizan/Minimizan una función objetivo $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (por ejemplo: Coste, producción, beneficio, riesgo, ventas, utilidad, etc) sujeto a una serie de m restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ g_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\}$$ que definen el conjunto factible, admisible o de oportunidades B

Ejemplo Función de producción de Cobb-Douglas

$$f(x_1,x_2) = A\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \text{factor productivo } \underline{\text{Capital}} \\ x_2 = \text{factor de } \underline{\text{trabajo}} \\ A = \text{factor total de productividad (constante)} \\ \alpha, \beta: \text{elasticidades de capital y trabajo} \end{array}\right.$$

Si cada hora de trabajo se paga a p u.m. y cada unidad de factor capital a q u.m., y se dispone de M u.m. para la compra de recursos, entonces la restricción es:

$$g(x_1, x_2) = p x_2 + q x_1 - M = 0$$

Programa:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a.} & g(x_1, x_2) = 0 \end{array}}$$

"Sujeto a"

OPTIMOS LOCALES Y GLOBALES

Definición Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ se dice que:

- $\vec{a} \in A$ es máximo (mínimo) local de f si $\exists\, B(\vec{a}, r)$: $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ ($\geq$) $\forall \vec{x} \in A \cap B(\vec{a}, r)$

  bola

- $\vec{a} \in A$ es máximo (mínimo) global de f si $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ ($\geq$) $\forall \vec{x} \in A$

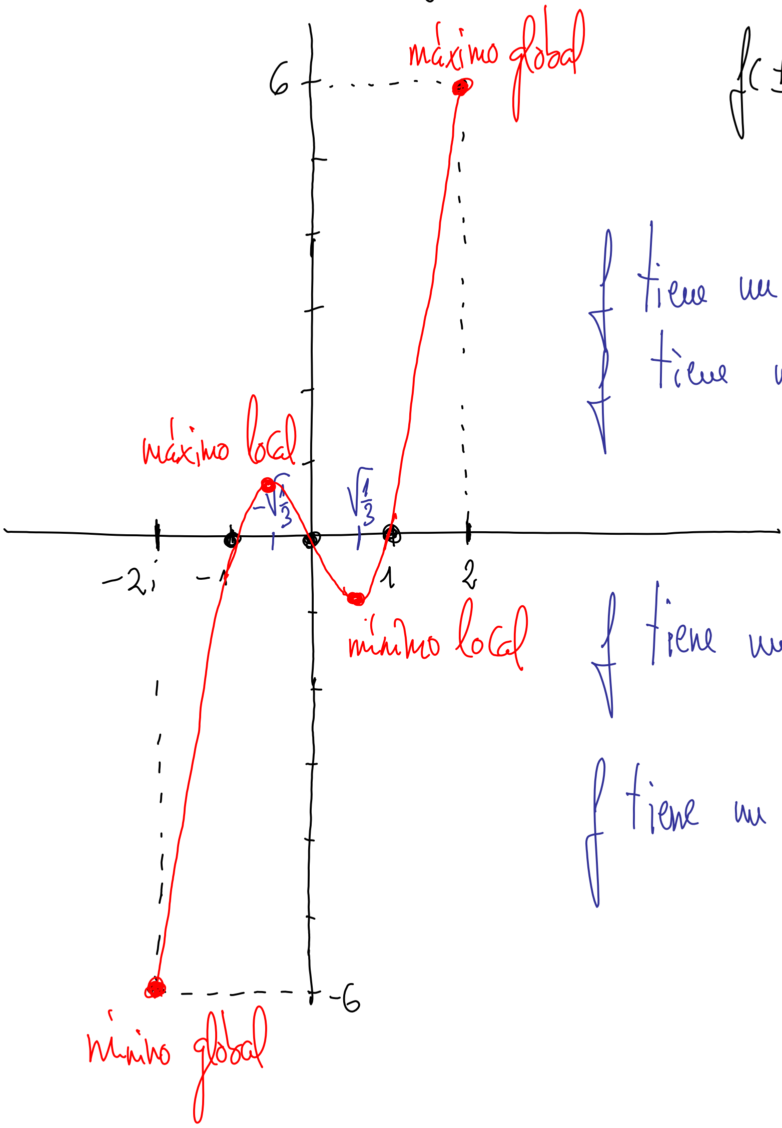
Ejemplo Dada $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = (x^2 - 1)x = x^3 - x$$

Calcula sus óptimos locales y globales

Óptimos locales: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$f''(x) = 6x \begin{cases} f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 6\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} & \text{mínimo local} \\ f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 6\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}} & \text{máximo local} \end{cases}$$



$f(\pm 2) = \pm 6$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

f tiene un mínimo local en $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ de valor $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

f tiene un máximo local en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ de valor $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

f tiene un mínimo global en $x = -2$ de valor $f(-2) = -6$

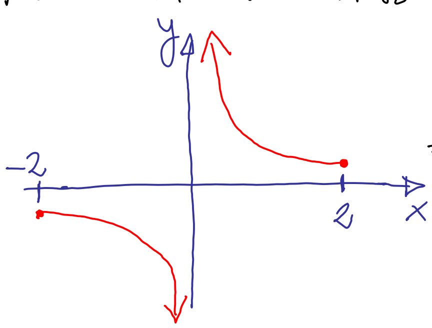
f tiene un máximo global en $x = 2$ de valor $f(2) = 6$

TEOREMA DE WEIERSTRASS.

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$, si A es compacto (cerrado y acotado) y f es continua entonces f alcanza su máximo y mínimo global en A.

En el ejemplo $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3-x$ se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass ya que $A=[-2,2]$ es compacto y $f(x)=x^3-x$ es continua.

- Sin embargo, si cambiamos el dominio a $A=[-2,2[$, se deja de cumplir la condición de compacidad ($A=[-2,2[$ no es cerrado) y la función no alcanza nunca su máximo global (ya que $2 \notin [-2,2[$).
- Si cambiamos $A=[-2,2]$ por $A=[-2,\infty[$ tampoco se cumple la condición de compacidad ($A=[-2,\infty[$ no es acotado) y tampoco existe máximo global (la función crece indefinidamente)
- Si tomamos $A=\mathbb{R}$ (no acotado), no existe ni máximo ni mínimo global.
- Si tomamos $A=[-2,2]$ y $f(x)=\frac{1}{x}$, tampoco se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass, ya que $f(x)=\frac{1}{x}$ no es continua en $x=0$

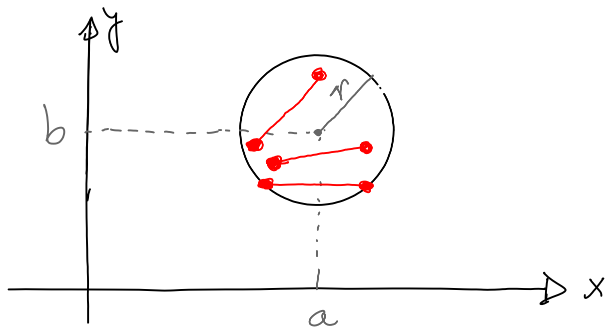


$\Rightarrow$ no existe ni máximo ni mínimo global

CONJUNTOS Y FUNCIONES CONVEXAS

Definición Se dice que un conjunto A es convexo si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ entonces A siempre contiene al segmento que los une.

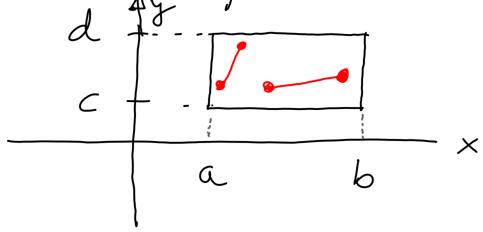
Ejemplo La bola (tanto abierta como cerrado) de centro (a,b) y radio r: $B((a,b), r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ es un conjunto convexo.



Nótese, sin embargo, que la circunferencia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ no es un conjunto convexo ya que no contiene al segmento que une cualesquiera dos puntos de la misma.

Ejemplo Cualquier rectángulo (abierto o cerrado)

$A = [a,b] \times [c,d]$ es convexo

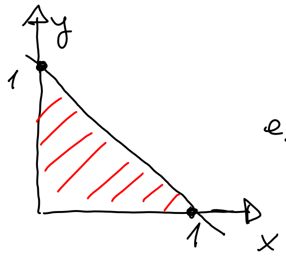


Ejemplo Cualquier recta como $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by=d\}$ es convexo

Ejemplo Cualquier semiplano como $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by\leq d\}$ es convexo

Ejemplo La intersección de convexos es convexa. Por ejemplo:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x+y\leq 1 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

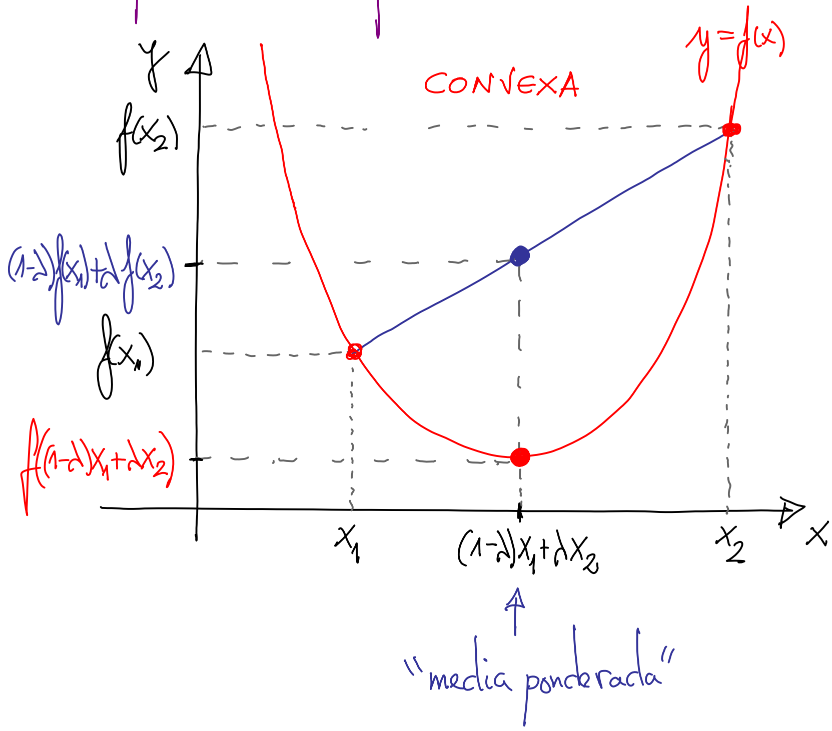


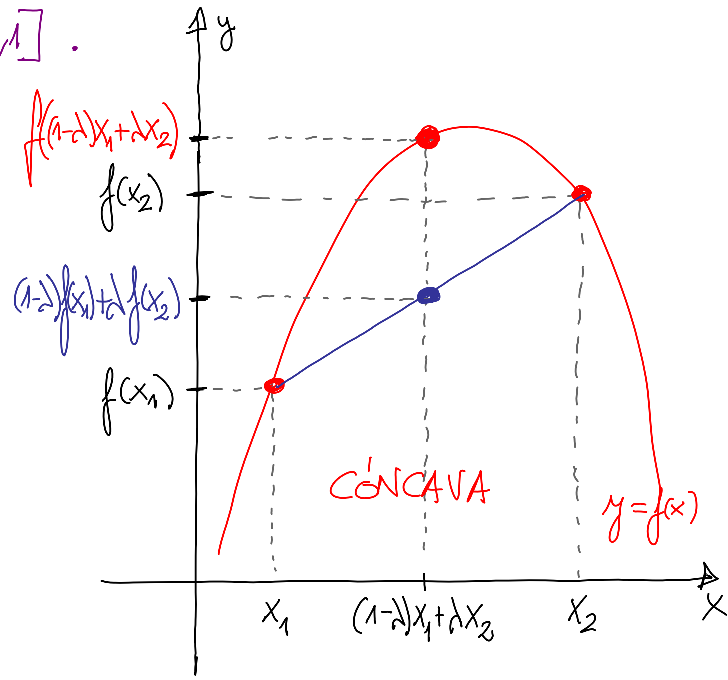
es convexo.

Definición Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ convexo no vacío. Diremos que $f: A\to\mathbb{R}$ es una función convexa (cóncava) en A cuando:

$$f\left((1-\lambda)\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_2\right) \underset{\geq}{\leq} (1-\lambda)f(\vec{x}_1)+\lambda f(\vec{x}_2)$$

para cualesquiera $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in A$, $\lambda\in[0,1]$.





Ejemplo $f(x)=x^2$ es convexa y $f(x)=-x^2$ es cóncava

Ejemplo $f(x)=x^3$ es convexa para $x>0$ y cóncava para $x<0$

Proposición (Caracterización diferencial de funciones convexas)

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ dos veces derivable y A abierto convexo, entonces:

f es convexa (cóncava) $\iff$ $\mathrm{Hess}(f(\vec{x}))$ es (semi)definida positiva (negativa) $\forall \vec{x} \in A$

Ejemplo $f(x,y) = 2x^2+y^2-x\cdot y$ es convexa : $\mathrm{Hess}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ def. posit. ($4>0$, $8-1=7>0$)

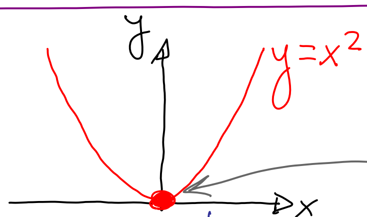
$f(x,y) = -x^2-3y^2$ es cóncava : $\mathrm{Hess}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ def. negat. ($-2<0$, $12>0$)

¿Cuándo un óptimo local lo es tambien global?

Teorema "local-global" Dado A convexo y $f: A \to \mathbb{R}$,

si f es convexa (cóncava) y $\vec{a} \in A$ mínimo (máximo) local $\Rightarrow$ $\vec{a}$ es mínimo (máximo) global

Ejemplo $A=\mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)=x^2$



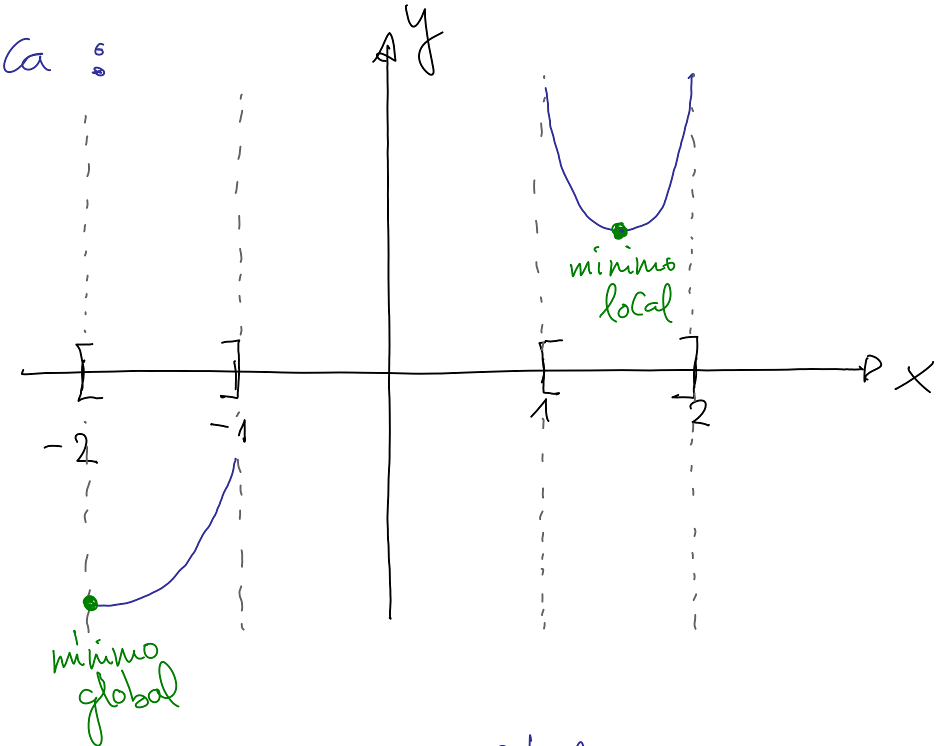
$x=0$ es mínimo local y global

A es convexo y f es convexa $(f''(x)=2>0) \Rightarrow f'(x)=2x=0 \Rightarrow$

¿Es realmente esencial que el conjunto factible A sea convexo o es suficiente con que la función objetivo f sea cóncava o convexa?

Veamos un ejemplo donde

Ejemplo | Sea $f : [-2,-1] \cup [1,2]$ dada por la gráfica:



El mínimo local y el global no coinciden (a pesar de que la función es convexa) porque el conjunto factible $A = [-2,-1] \cup [1,2]$ no es convexo

Ejercicio 1 Dada $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x^2 - 6y^2$

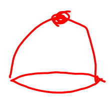
a) Hallar los puntos críticos de f.

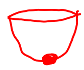
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6(-2x + x^2 + y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 12\underbrace{(-1+x)}\,y = 0 \end{aligned}\right\}$$

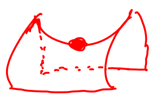
a.1) $y = 0 \Rightarrow -2x + x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$ $\quad \left\{\begin{array}{c} (x,y) \\ (0,0) \\ (2,0) \end{array}\right\}$ puntos críticos

a.2) $x = 1 \Rightarrow -2 + 1 + y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ $\quad \left\{\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array}\right\}$ puntos críticos

$$Hess(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & \partial^2_{yy} f \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} -1+x & y \\ y & -1+x \end{pmatrix} = H(x,y)$$

$H(0,0) = 12 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ def. negativa $\Rightarrow (0,0)$ máximo local 

$H(2,0) = 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ def. positiva $\Rightarrow (2,0)$ mínimo local 

$H(1,1) = 12 \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0,\ -1$ $\quad$ indefinida $\Rightarrow (1,1)$ pto. de silla 

$H(1,-1) = 12 \begin{pmatrix} \boxed{0} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0,\ -1$ $\quad$ indefinida $\Rightarrow (1,-1)$ pto de silla.

b) ¿Son óptimos globales?

El teorema de Weierstrass no asegura nada, ya que $A = \mathbb{R}^2$ no es compacto. Por otra parte, la función $f(x,y)$ no es ni cóncava ni convexa, con lo cual no podemos concluir que los óptimos locales sean globales. Usando un poco la "imaginación" podemos darnos cuenta de que $f(x,0) = 2x^3 - 6x^2$ puede tomar valores arbitrariamente grandes (∞) y $f(0,y) = -6y^2$ puede tomar valores arbitrariamente pequeños ($-\infty$), de manera que no existe óptimo global (la función f no está acotada ni superior ni inferiormente).

Ejercicio 2a

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y) = x^2+y^2 \\ \text{s.a} & g(x,y) = x+2y-4=0 \end{array}}$$

1) Método de sustitución.

$x+2y=4 \Rightarrow x = 4-2y$, $f(x,y) = (4-2y)^2 + y^2 = h(y)$

$h'(y) = 2(4-2y)(-2) + 2y = -4(4-2y)+2y = -16+8y+2y = 10y-16=0$

$\Rightarrow y = 16/10 = 8/5$, $x = 4 - 2\frac{8}{5} = \frac{20-16}{5} = \frac{4}{5}$

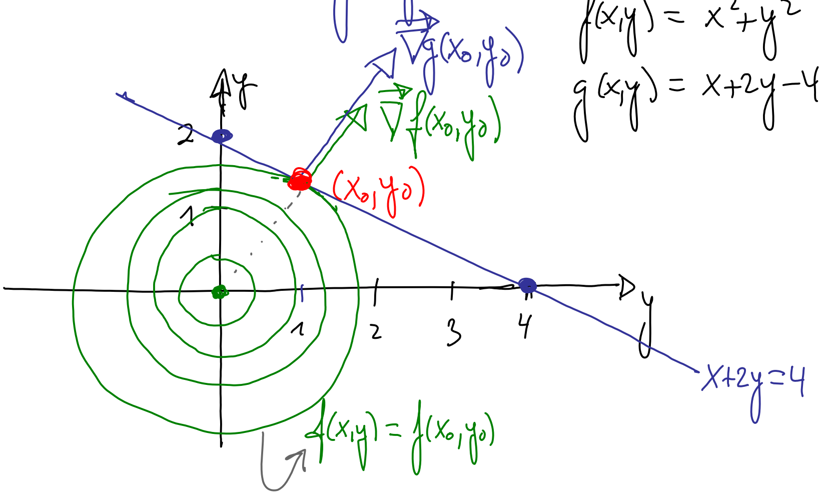
$(x_0,y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ punto crítico (óptimo local)

$h''(y) = (10y-16)' = 10 > 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es mínimo local

de valor $f\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16+64}{25} = \frac{16}{5}$

Como el conjunto factible $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y-4=0\}$ es convexo y $f(x,y) = x^2+y^2$ es convexa $\Rightarrow$ el mínimo local es también mínimo global

2) Método gráfico



$$f(x,y) = x^2+y^2$$
$$g(x,y) = x+2y-4=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x^2+y^2 = C_1 \\ f(x,y) = x^2+y^2 = C_2 \\ \vdots \end{array}\right\}$$ curvas de nivel ("circunferencias")

$\vec{\nabla} f(x,y)$ es perpendicular a las curvas de nivel $f(x,y)=C$

$\vec{\nabla} g(x,y)$ es perpendicular a la restricción $g(x,y)=0$

En el punto de tangencia (x_0,y_0) los dos gradientes son PARALELOS

Condición de tangencia o de Lagrange
$$\boxed{\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0,y_0)}$$
λ: parámetro de Lagrange

En el ejemplo anterior: $\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \\ \vec{\nabla} g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (1,2) \end{array}\right.$

Condición de tangencia $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ $\Rightarrow (2x,2y) = \lambda(1,2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=\lambda \\ 2y=2\lambda \end{array}\right.$

junto con restricción: $g(x,y) = x+2y-4=0$

3 ecuaciones, 3 incógnitas x, y, λ

$$\lambda = 2x \Rightarrow 2y = 2(2x) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-2y=0 \\ x+2y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0,y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$\lambda = 2x_0 = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$ ← parámetro de Lagrange (Véase más adelante interpretación económica)

Ejercicio 26

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & f(x,y) = x+y & \\ \text{s. a.} & g(x,y) = \ln(x^2+y) = 0 \end{array}} \to \text{Cerrado no acotado (no Compacto) no Convexo}$$

(Resuelto en pag. 208 del libro de texto)

1) Método de sustitución

$$\ln(x^2+y) = 0 \iff x^2+y = 1 \Rightarrow y = 1-x^2$$

$$f(x,y) = x+y = x+(1-x^2) = -x^2+x+1 = h(x)$$

$$h'(x) = -2x+1 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \xRightarrow{y=1-x^2} y = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ punto crítico restringido

$h''(x) = (-2x+1)' = -2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ máximo local

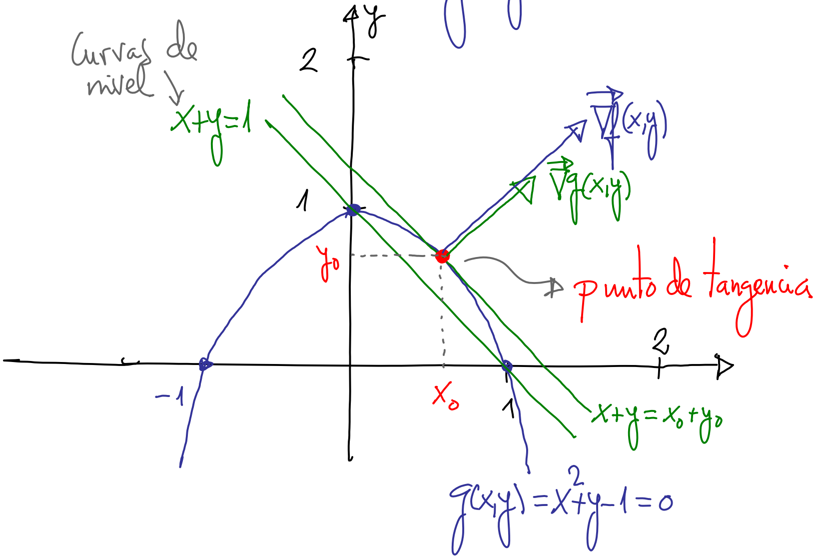
¿Es máximo global?

El conjunto factible $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overbrace{g(x,y) = y+x^2-1 = 0}^{\text{parábola}}\}$ no es compacto ni es convexo luego no se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass ni de "local-global".

No obstante, sabemos que $h(x) = -x^2+x+1$ es cóncava y que x puede tomar cualquier valor en la restricción $g(x,y) = x^2+y-1 = 0$,

es decir, $x \in \mathbb{R}$ (convexo), de manera que podemos asegurar que el máximo local en $x = \frac{1}{2}$ es también máximo global.
Veámoslo gráficamente:

2) Método gráfico.



$$\vec{\nabla}f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (1,1)$$

$$\vec{\nabla}g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x,1)$$

Condición de tangencia o de Lagrange

$$\vec{\nabla}f(x,y) = \lambda\, \vec{\nabla}g(x,y)$$

$$(1,1) = \lambda\,(2x,1) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 1 = \lambda \cdot 1 \\ x^2+y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \leftarrow$ igual que el obtenido por sustitución

$f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 5/4 \leftarrow$ valor máximo de la función objetivo.

Ejercicio 2c

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y,z) = x^2+3y^2+z^2 \\ \text{s. a.} & g(x,y,z) = x-y+2z = 0 \end{array}}$$

→ Convexa

→ Cerrado y no acotado. Convexo

Despejamos $x = y - 2z$ de la restricción $g(x,y,z)=0$ y sustituimos en

$$f(x,y,z) = (y-2z)^2 + 3y^2 + z^2 = h(y,z) \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{\nabla} h(y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(2(y-2z)+6y\,,\, 2(y-2z)(-2)+2z\right) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 8y - 4z = 0 \\ -4y + 10z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$$

¿máximo, mínimo o inflexión?

$$\begin{array}{cc} 8>0 & 64>0 \end{array}$$

$$\mathrm{Hess}(h(y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{definida positiva} \Rightarrow$$

$f(x,y,z)$ alcanza en $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ un mínimo local de valor $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Como (y,z) pueden tomar cualquier valor, es decir, $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ (convexo) y $h(y,z)$ es convexa, se tiene que el mínimo local es también mínimo global.

Otra forma de verlo es teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{Hess}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ definida positiva} \Rightarrow f(x,y,z) = \underline{x^2 + 3y^2 + z^2 \text{ es convexa}}$$

Además, el conjunto factible $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ y por consiguiente es un conjunto convexo. De manera que el teorema local-global asegura que el mínimo local coincide con el mínimo global.

Además, $f(x,y,z)$ puede tomar valores arbitrariamente grandes (∞) por lo que no hay máximo global, y con eso contestamos el ejercicio 2d).

PUNTOS REGULARES Y SINGULARES

Hemos visto en el método gráfico que la condición de tangencia o de Lagrange $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$ nos permite identificar los óptimos locales del programa:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Opt.} & f(x,y) \\ \text{s.a.} & g(x,y)=0 \end{array}}$$

pero ¿qué pasa cuando $\vec{\nabla} g(x,y) = (0,0)$?

1) CASO DE UNA SOLA RESTRICCIÓN $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

Diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO REGULAR si $\vec{\nabla} g(\vec{a}) \neq \vec{0}$, en caso contrario diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO SINGULAR

Ejemplo Dada $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (Circunferencia de radio 1)

¿Existen puntos singulares?

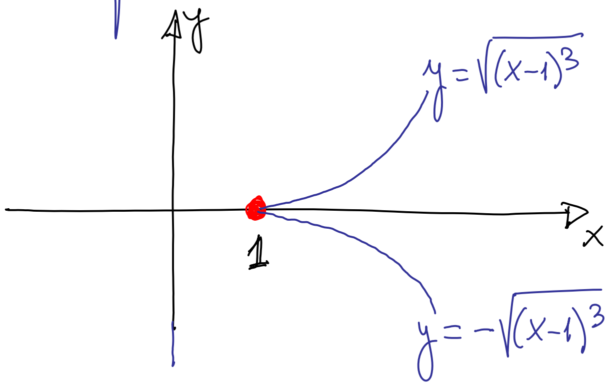
$$\vec{\nabla} g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x=0 \\ 2y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Como $(x,y)=(0,0)$ es exterior a la circunferencia ($g(0,0)=-1\neq 0$), concluimos que todos los puntos de la circunferencia son REGULARES.

Ejemplo Dada $g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$ ¿existen puntos singulares?

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \left(3(x-1)^2, -2y \right) = (0,0) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(x-1)^2=0 \\ -2y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y)=(1,0)$$

Como $g(1,0)=(1-1)^3-1^2=0 \Rightarrow (1,0)$ verifica la restricción $g(x,y)=0$ y es un punto SINGULAR del conjunto factible.



$$g(x,y)=(x-1)^3-y^2=0 \Rightarrow$$
$$y=\pm\sqrt{(x-1)^3}$$

2) CASO DE DOS RESTRICCIONES $\left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ g_2(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\}$

Diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO REGULAR si $\vec{\nabla} g_1(\vec{a})$ y $\vec{\nabla} g_2(\vec{a})$ son linealmente independientes (es decir, si NO son paralelos).

En caso contrario diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO SINGULAR

Ejemplo
$$g_1(x,y,z)=x+y-z+3=0 \Rightarrow \vec{\nabla} g_1(x,y,z)=(1,1,-1)$$
$$g_2(x,y,z)=x-y+2=0 \Rightarrow \vec{\nabla} g_2(x,y,z)=(1,-1,0)$$

Como $(1,1,-1)$ y $(1,-1,0)$ son linealmente independientes, se tiene que no hay ningún punto singular (todos son regulares)

2) CASO DE m RESTRICCIONES $\left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ g_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\}$

Diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO REGULAR si $\{\vec{\nabla} g_1(\vec{a}),\vec{\nabla} g_2(\vec{a}),\dots,\vec{\nabla} g_m(\vec{a})\}$ son linealmente independientes (es decir, la matriz Jacobiana tiene rango m)

En caso contrario diremos que $\vec{a}$ es un PUNTO SINGULAR

TEOREMA DE LAGRANGE

Dado el programa: Opt. $f(\vec{x})$, s.a. $\left\{\begin{array}{l} g_1(\vec{x})=0 \\ g_2(\vec{x})=0 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x})=0 \end{array}\right\}$ (Conjunto factible A)

si $\vec{a}\in A$ es un extremo local REGULAR, entonces existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ("multiplicadores de Lagrange") tales que:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{a}) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\vec{a}) + \dots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m(\vec{a}).}$$ Condición de Lagrange

Los puntos $\vec{a}\in A$ que verifican esta condición se denominan puntos estacionarios o puntos críticos restringidos.

En el caso de una única restricción $g(\vec{x})=0$, la condición de Lagrange $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \lambda \vec{\nabla} g(\vec{a})$ coincide con la condición de tangencia que ya hemos visto.

Si definimos la FUNCIÓN LAGRANGIANA:

$$L(\vec{x},\lambda) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \lambda_2 g_2(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x})$$

entonces la condición de Lagrange se puede escribir como:

$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0, \frac{\partial L}{\partial x_2}=0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}=0$ y las restricciones como $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0$.

Los siguientes ejercicios de la relación están resueltos en el libro "Optimización Matemática Aplicada a la Economía" de la bibliografía

Ejercicio 3b

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } f(x,y) = x^2+y^2-2xy \\ \text{s.a. } g(x,y) = x^2+y^2-8=0 \end{array}}$$

(hecho en pag 211 libro texto)

Solución: $\begin{cases} (x_0,y_0,\lambda) = (\pm 2, \pm 2, 0), & f(x_0,y_0) = 0 \quad \text{mínimo} \\ (x_0,y_0,\lambda) = (\pm 2, \mp 2, 2), & f(x_0,y_0) = 16 \quad \text{máximo} \end{cases}$

Ejercicio 3f (pag. 215)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min. } f(x,y) = x^2+y^2 \\ \text{S.a. } xy = 1 \end{array}}$$

$(x_0, y_0) = (\pm 1, \pm 1)$, $f(x_0,y_0) = 2$

Ejercicio 8a pag. 225

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } x^2+y^2+2z^2+4 \\ \text{S.a. } x+y+z=10 \end{array}}$$

$(x_0,y_0,z_0;\lambda) = (4,4,2;8)$

$f(x_0,y_0,z_0) = 40$

Ejercicio 8c pag. 226

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } x+4y+3z \\ \text{s.a. } x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2=9 \end{array}}$$

$(x_0,y_0,z_0;\lambda) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{2}; 1)$

$f(x_0,y_0,z_0) = 18$

Ejercicio 8d pag. 228

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Opt. } xy+z \\ \text{s.a. } x^2+y^2+z^2=1 \end{array}}$$

$(x_0,y_0,z_0;\lambda) = (0,0,1;\frac{1}{2})$, $f=1$ máximo

$(x_0,y_0,z_0;\lambda) = (0,0,-1;-\frac{1}{2})$, $f=-1$ mínimo

Ejercicio 8e pag. 240

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Opt. } x+y+z \\ \text{s.a. } x^2+y^2+z^2=1,\ x-y-z=1 \end{array}}$$

$(x_0,y_0,z_0;\lambda_1,\lambda_2) = (1,0,0;1,-1)$, $f=1$ máximo

$(x_0,y_0,z_0;\lambda_1,\lambda_2) = (-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3};-1,\frac{1}{3})$ $f=-\frac{5}{3}$ mínimo

Ejercicio 8f pag. 242

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Opt. } x+y \\ \text{S.a. } \begin{cases} x^2+2y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \end{array}}$$

$(x_0,y_0,z_0;\lambda_1,\lambda_2) = (0,0,1;-\frac{1}{2},1)$, $f=0$ mínimo

$(x_0,y_0,z_0;\lambda_1,\lambda_2) = (\frac{4}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5};\frac{1}{2},\frac{1}{5})$, $f=\frac{6}{5}$ máximo.

Ejercicio 3a

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max } f(x,y) = x^3+2y^2 \\ &\text{s.a. } g(x,y) = x^2+2y^2-4=0 \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ continua

$\rightarrow$ elipse (Compacto, no Convexo)

Weierstrass $\Rightarrow$ existe máximo y mínimo global.

Condición de tangencia o de Lagrange $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2, 4y)$$

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x, 4y) = (0,0) \Rightarrow (x,y)=(0,0) \notin \text{región factible} \Rightarrow$$

todos los puntos de la región factible son REGULARES.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Rightarrow (3x^2, 4y) = \lambda(2x, 4y) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2 = \lambda \cdot 2x \Leftrightarrow x(3x-2\lambda)=0 \\ 4y = \lambda 4y \Leftrightarrow y(1-\lambda)=0 \\ x^2+2y^2=4 \end{array}\right.$$

3.a.1) $\lambda = 1 \overset{x(3x-2\lambda)=0}{\Longrightarrow} x(3x-2)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow (x,y) = \left\{\begin{array}{l}(0,\sqrt{2}) \\ (0,-\sqrt{2})\end{array}\right\} \\ x=\frac{2}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{(4-\frac{4}{9})/2} = \pm\frac{4}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\frac{2}{3},\frac{4}{3}) \\ (\frac{2}{3},-\frac{4}{3})\end{array}\right\}\end{array}\right.$

3.a.2) $y=0 \overset{x^2+2y^2=4}{\Longrightarrow} x=\pm 2 \overset{x(3x-2\lambda)=0}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 2(3\cdot 2-2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=3 \\ -2(3(-2)-2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-3 \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{ll}(2,0) & \lambda=3 \\ (-2,0) & \lambda=-3\end{array}\right.$

$f(0,\pm\sqrt{2}) = 4$, $f(\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3}) = \frac{104}{27} \simeq 3'85$, $\underbrace{f(2,0)=8}_{\text{máximo}}$, $\underbrace{f(-2,0)=-8}_{\text{mínimo}}$

Ejercicio 4

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } f(x,y) = x^3+2y^2 \\ \text{s.a. } g(x,y) = x^2+2y^2-4=0 \end{array}}$$

por sustitución.

$2y^2 = 4-x^2$

$f(x,y) = x^3 + \underbrace{(4-x^2)}_{2y^2} = h(x)$ $\quad x\in[-2,2] \leftarrow$ Compacto

$h'(x) = 3x^2-2x = 0 \Rightarrow x(3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ y=\pm\sqrt{2} \\ x=\frac{2}{3},\ y^2=(4-\frac{4}{9})/2,\ y=\pm\frac{4}{3} \end{cases}$ extremos locales

¿Son extremos globales?, $h''(x) = 6x-2$ no tiene signo definido $h(x)$ no es ni cóncava ni convexa (recordad el ejemplo de la página 3).

De hecho, en el ejercicio 3.a) vimos que el máximo y el mínimo global se dan en $x=\pm 2,\ y=0$, los cuales no se obtienen por el método de sustitución. Esto sucede porque este problema NO es equivalente a un problema sin restricciones.

Ejercicio 3c

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } f(x,y) = x^2+2y^2-xy \\ \text{s.a. } g(x,y) = 2x+y-22=0 \end{array}}$$

$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ positiva

$\rightarrow$ Convexa

$\rightarrow$ Convexo (no Compacto) $\Rightarrow$

[equivalente a un problema sin restricciones]

Sabemos que el mínimo local coincide con el global. Condición de tangencia:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (\underbrace{2x-y}_{\frac{\partial f}{\partial x}},\ \underbrace{4y-x}_{\frac{\partial f}{\partial y}}) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y) = \lambda(2,1) \Rightarrow \begin{cases} 2x-y = 2\lambda \\ 4y-x=\lambda \end{cases}$$

$$2x+y-22=0$$

Si lo hiciésemos con la Lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y)-\lambda g(x,y) = x^2+2y^2-xy-\lambda(2x+y-22) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x-y-2\lambda = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y-x-\lambda = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x+y-22) = 0 & (3) \end{cases}$$

obtenemos las mismas ecuaciones.

Despejando λ de (2) y sustituyendo en (1) tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y-2(4y-x) &= 0 \\ 2x+y-22 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{(x,y)=(9,4)}_{\text{mínimo}} \xRightarrow{(1)} \lambda = 7,\ f(9,4)=77$$

Ejercicio 3d

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max. } f(x,y) = -3x^2+12y \\ &\text{s.a. } g(x,y) = x-y-1=0 \end{aligned}}$$

$Hess(f) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidef. negat.

$\to$ Cóncava (semidefinida negativa)

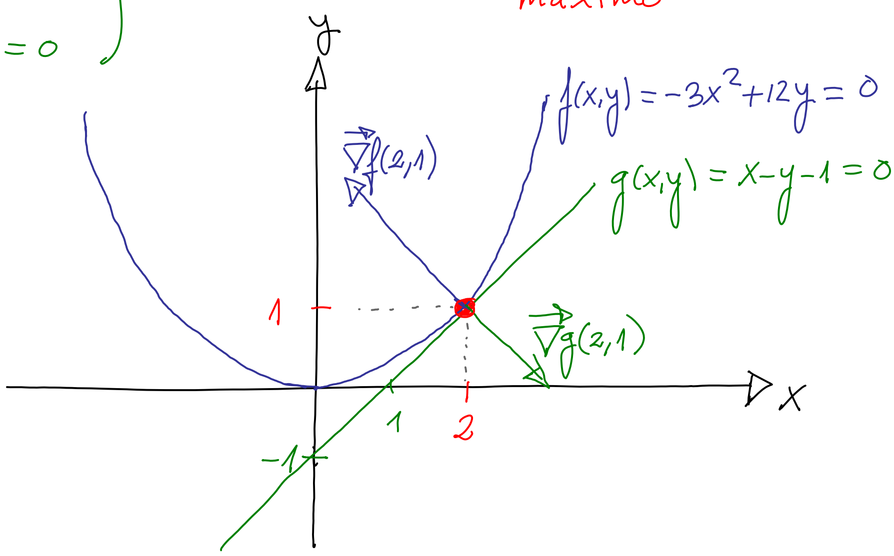
$\to$ Convexo (no Compacto)

$\Rightarrow$ Si hay un máximo local, éste será también global.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = -3x^2+12y - \lambda(x-y-1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -6x-\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 12+\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(x-y-1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda=-12,\ \underbrace{(x,y)=(2,1)}_{\text{máximo}},\ f(2,1)=0$$

Gráficamente:



Vemos que no existe mínimo global, ya que las curvas de nivel $f(x,y) \overset{!}{=} c < 0$ (parábolas) cortan la región factible para valores arbitrariamente pequeños de c $(-\infty)$. Otra forma de verlo es por el método de sustitución:

$$x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow f(x,y) = -3x^2+12y = \underbrace{-3x^2+12(x-1)}_{\text{no tiene mínimo}} = h(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

$Hess(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ indefinida.

Ejercicio 3.e.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Opt.} & f(x,y) = 3xy \\ \text{S.a.} & g(x,y) = 2x - 3y - 1 = 0 \end{array}}$$

→ ni cóncava ni convexa

→ Convexo (no compacto)

Tanto el teorema de Weierstrass como el local-global no aseguran nada.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 3xy - \lambda(2x - 3y - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 3y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 3x + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x - 3y - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{6}\right),\ \lambda = -1/4,\ f\left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{6}\right) = -1/8$$

Para averiguar si se trata de un máximo o un mínimo usaremos el

MÉTODO DE LA HESSIANA ORLADA: Sea (x,y) un punto estacionario y,

$$\overline{Hess}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

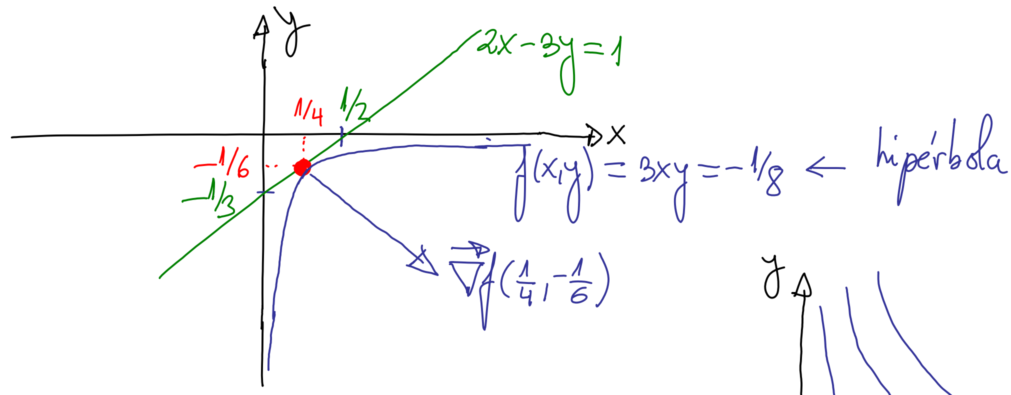
$\det(\overline{Hess}(x,y,\lambda)) < 0 \Rightarrow$ mínimo local

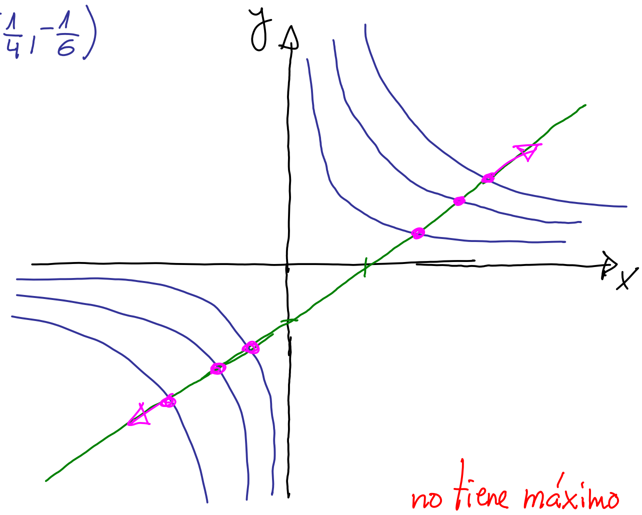
$\det(\overline{Hess}(x,y,\lambda)) > 0 \Rightarrow$ máximo local

En nuestro caso $\overline{Hess}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\overline{Hess}(x_0,y_0,\lambda)) = -36 < 0$

mínimo local

Para ver si es mínimo global, usemos el método gráfico:





Para $f(x,y) = 3xy = c > 0$ tenemos:
es decir, $f(x,y)$ puede tomar valores arbitrariamente grandes $\Rightarrow$ no hay máximo global

— Otra forma de verlo (sustitución) $2x-3y=1 \Rightarrow 3y = 2x-1 \Rightarrow f(x,y) = 3yx = (2x-1)x = \overbrace{2x^2-x}^{\text{no tiene máximo}}$, $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 \\ \text{S.a.} & g(x,y) = x^3 - y^2 = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ no convexo, no compacto. (no acotado)

$y = \pm\sqrt{x^3}$, $x \geq 0$

Veamos si hay puntos singulares:

$\vec{\nabla} g(x,y) = (3x^2, -2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$, $g(0,0) = 0 \Rightarrow$ Punto singular

Veamos qué dice la condición de Lagrange para los puntos regulares:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - \lambda(x^3 - y^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x+1) - 3\lambda x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^3 - y^2) = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{ll} 2 + 2x - 3x^2\lambda = 0 & (1) \\ y(1+\lambda) = 0 & (2) \\ x^3 - y^2 = 0 & (3) \end{array}\right\}$$

Vemos que $(x,y) = (0,0)$ no verifica

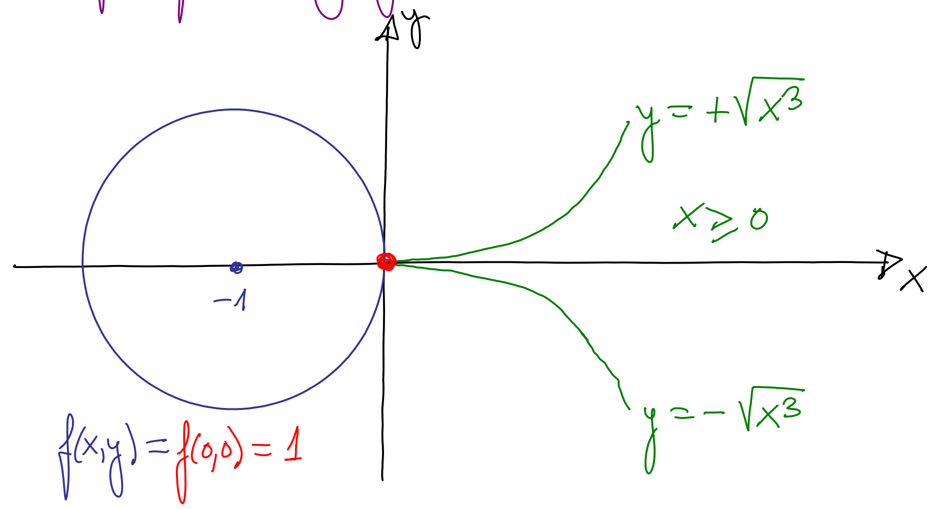
5.1) $\overset{(2)}{\lambda} = -1 \Rightarrow \overset{(1)}{3x^2 + 2x + 2 = 0} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{6}$ no existe

5.2) $\overset{(2)}{y = 0} \Rightarrow x = \overset{(3)}{0} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 + 2\cdot 0 - 3\cdot 0 \cdot \lambda = 0$ imposible!

(0,0) no es estacionario

Resumiendo, el método de Lagrange no proporciona otra información.

Veamos qué pasa gráficamente:



El punto singular (0,0) es un mínimo global.

No existe máximo global (es infinito) ya que $f(x,y)$ puede tomar valores arbitrariamente grandes (todas las circunferencias de radio mayor que 1 cortan a la región factible).

Otra forma de verlo es por el método de sustitución:

$x^3 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^3 \Rightarrow f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + x^3 = h(x)$

con $x \geq 0 \Rightarrow h(x)$ no está acotada superiormente (es decir, $h(\infty) = \infty$).

INTERPRETACIÓN DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE λ_i Y TEOREMA DE SENSIBILIDAD.

Sea $\vec{x}_0$ un punto estacionario del programa:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Optimizar } f(\vec{x}) \\ \text{s.a.} \quad \begin{cases} g_1(\vec{x}) = b_1 \\ g_2(\vec{x}) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) = b_m \end{cases} \end{array}}$$

Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lambda_j = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial b_j}}$$

"Valor sombra de la restricción $g_j(\vec{x}) = b_j$"

Para pequeñas variaciones de b_j (Δb_j pequeño) usaremos la aproximación:

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}_0) \approx \lambda_j \, \Delta b_j}$$

En términos económicos, λ_j mide la tasa marginal de cambio $\left(\frac{\Delta f(\vec{x}_0)}{\Delta b_j}\right)$ del valor óptimo de la función objetivo $(\Delta f(\vec{x}_0))$ ante una variación (Δb_j) del término independiente b_j de la restricción $g_j(\vec{x}) = b_j$. Por ejemplo, en un problema de planificación de la producción en el que las restricciones $g_j(\vec{x}) = b_j$ representan la limitación de recursos disponibles y $f(\vec{x})$ representa el beneficio obtenido, el multiplicador $\lambda_j \approx \frac{\Delta f(\vec{x}_0)}{\Delta b_j}$ mide aproximadamente la variación del beneficio máximo al incrementar en una unidad la cantidad b_j de recurso j-ésimo. Es decir, λ_j representa el máximo de lo que se está dispuesto a pagar por una unidad adicional de recurso j-ésimo. ("precio sombra")

Ejercicio 6

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min. } f(x,y) = 4x^2+y^2 \\ \text{s.a. } g(x,y) = 2x+y-5000=0 \end{array}}$$

$\rightarrow$ Convexa

$\rightarrow$ Convexo, (no compacto)

$\Rightarrow$ El mínimo local coincide con el global.

$$L(x,y,\lambda) = 4x^2+y^2-\lambda(2x+y-5000)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 8x-2\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y-\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 5000-2x-y=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_0 = 1250 \\ y_0 = 2500 \\ \lambda = 5000 \end{array}$$

$f(x_0,y_0) = 12.500.000$

Si $\Delta b = 1 \Rightarrow$

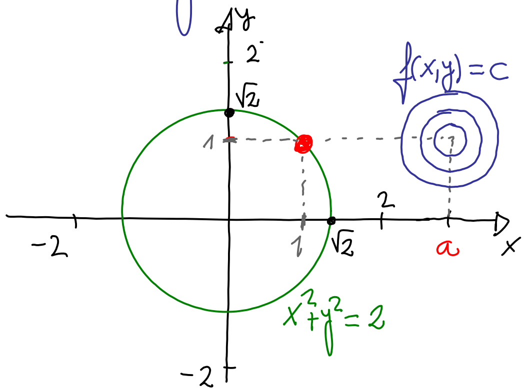
$\Delta f(x_0,y_0) \approx \lambda \Delta b = 5000$

Teorema de sensibilidad

Ejercicio 7 Determina "a" para que $(x_0, y_0) = (1,1)$ sea solución de

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } f(x,y) = -(x-a)^2 - (y-1)^2 \\ \text{s.a. } g(x,y) = x^2+y^2-2=0 \end{array}} \overset{\text{equivalente}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} \text{Min } f(x,y) = (x-a)^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a. } g(x,y) = x^2+y^2-2=0 \end{array}}$$

Gráficamente:



$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x-a) - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2-2) = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo $(x,y)=(1,1)$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2(1-a) - 2\lambda \cdot 1 = 0 \quad (1) \\ 2\cancel{(1-1)} - 2\lambda \cdot 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right\}$$

$$(2) \Rightarrow -2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2(1-a) - 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

De manera que $f(1,1) = (1-1)^2 + (1-1)^2 = 0 \Rightarrow$ la curva de nivel

$f(x,y) = f(1,1) = 0$ es la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 0.

Ejercicio 8.b

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Opt. } f(x,y,z) = x+y+z \\ \text{s.a. } g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-12=0 \end{array}} \begin{array}{l} \to \text{Continua} \\ \to \text{Compacto no convexo} \end{array}$$

El teorema de Weierstrass asegura la existencia de máximo y mínimo global

$$L(x,y,z,\lambda) = x+y+z - \lambda(x^2+y^2+z^2-12)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2x\lambda = 0, & \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 - 2\lambda z = 0 \ (3) \\ (2)\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2y\lambda = 0, & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2+z^2-12) = 0 \ (4) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} \overset{(1)}{=} 2x \overset{(2)}{=} 2y \overset{(3)}{=} 2z \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2\lambda} \xRightarrow[(4)]{x^2+y^2+z^2=12} \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2} = 12 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

8.b.1) $\lambda = -\frac{1}{4}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-2,-2,-2)$, $f(x_0,y_0,z_0) = -6$ ← mínimo global.

8.b.2) $\lambda = \frac{1}{4}$, $(x_0, y_0, z_0) = (2,2,2)$, $f(x_0,y_0,z_0) = 6$ ← máximo global

Gráficamente:

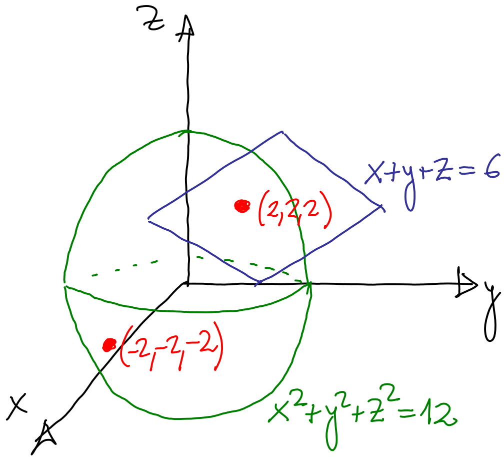
Los conjuntos de nivel:

$f(x,y,z) = x+y+z = 6$
$f(x,y,z) = x+y+z = -6$ (planos)

son tangentes a la esfera:

$x^2+y^2+z^2=12$

en los puntos $(x_0,y_0,z_0) = (\pm 2, \pm 2, \pm 2)$



Ejercicio 9

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2 \\ \text{S.a.} & g(x,y,z) = x-y-z-1=0 \end{array}}$$

$\to$ Convexa
$\to$ Convexo

El teorema local-global asegura que, si hay mínimo local, éste coincide con el global.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \\ (2) & \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + \lambda = 0 \\ (3) & \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda = 0 \\ (4) & \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x-y-z-1) = 0 \end{array}\right\}$$

$\lambda \overset{(1)}{=} 2x = -4y \overset{(3)}{=} -2z \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2},\ y = \frac{-\lambda}{4},\ z = \frac{-\lambda}{2}$

$x-y-z=1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$

$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, $f(x_0,y_0,z_0) = \frac{2}{5}$

$\Delta f \approx \lambda \cdot \Delta b = \frac{4}{5}\cdot(7-1) = \frac{24}{5}$ ← Teorema de sensibilidad.

$(x-y)^2$ $\quad Hes(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Semidefinida positiva

Ejercicio 10

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x,y,z) = \underbrace{x^2+y^2-2xy}_{(x-y)^2}+z^2 \\ \text{s.a.} & g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4=0 \end{array}}$$

f: $\to$ Convexa, Continua

g: $\to$ Compacto, no Convexo

b) El Teorema de Weierstrass asegura la existencia de máximo y mínimo global.

No hay puntos singulares ya que $\vec{\nabla} g(x,y,z) = (2x,2y,2z) = (0,0,0) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ que no cumple la restricción.

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-y)^2+z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

a)

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x-y) - 2\lambda x = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -2(x-y) - 2\lambda y = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = \underbrace{2z - 2\lambda z}_{z(1-\lambda)=0} = 0$

(4) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2+z^2-4) = 0$

10.1) $(3) \Rightarrow z=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} x^2+y^2=4$

$(1)+(2) \Rightarrow -2\lambda(x+y)=0 \begin{cases} \lambda=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x=y \Rightarrow x=y=\pm\sqrt{2} \\ x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-y=\pm\sqrt{2} \\ (1) \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases} \end{cases}$

10.2) $(3) \Rightarrow \lambda=1$

$\left.\begin{array}{l} (1)+(2) \Rightarrow x+y=0 \\ (1)-(2) \Rightarrow x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} z=\pm 2$

Resumiendo: $(x_0,y_0,z_0;\lambda) = \begin{cases} 10.1 \begin{cases} (\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0;0), & f(x_0,y_0,z_0) = 0 \to \text{mínimo} \\ (\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2},0;2), & f(x_0,y_0,z_0) = 8 \to \text{máximo} \end{cases} \\ 10.2 \; (0,0,\pm 2;1), \quad f(x_0,y_0,z_0) = 4 \end{cases}$

c) Si la restricción pasa de $x^2+y^2+z^2=4$ a $x^2+y^2+z^2=6 \Rightarrow \Delta b = 2$.
En el máximo se tiene que $(x_0,y_0,z_0) = (\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2},0)$, $\lambda=2$, $f(x_0,y_0,z_0)=8$
Por el Teorema de Sensibilidad $\Rightarrow \Delta f \simeq \lambda \cdot \Delta b = 2 \cdot 2 = 4$
de manera que el nuevo valor óptimo será $f(x_0,y_0,z_0) = 8+4 = \boxed{12}$

d) Si hubiésemos optado por resolver el problema por sustitución, podríamos haber despejado $z^2 \overset{(4)}{=} 4-x^2-y^2$ de la restricción y sustituir en la función objetivo:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-2xy+z^2 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2xy+4-\cancel{x^2}-\cancel{y^2} = -2xy+4 = h(x,y)$$

Si hacemos $\vec{\nabla} h(x,y) = \left(-2y, -2x\right) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

de manera que sólo estaríamos obteniendo el extremo local obtenido en el apartado 10.2, pero nos estarían faltando los extremos globales del apartado 10.1. El problema es que los valores de ¡x e y no pueden ser arbitrarios! ya que la restricción $x^2+y^2+z^2=4$ los está limitando a:

$$x \in [-2,2] \quad , \quad y \in [-2,2]$$

Conclusión: No es posible transformar este problema a otro equivalente sin restricciones!.

Esto no pasa si la restricción es, por ejemplo, un plano $x+y-z=3$, ya que, en este caso, x e y pueden tomar valores arbitrarios (sin ninguna restricción).

Ejercicio 11

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min.} & C(x,y) = 8x^2+4y^2 \\ \text{S.a.} & 5x+2y = 33 \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Convexa.

$\longrightarrow$ Convexo

$$L(x,y,\lambda) = 8x^2+4y^2-\lambda(5x+2y-33)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 16x-5\lambda = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = 8y-2\lambda = 0 \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(5x+2y-33) = 0 \end{array}\right\}$$

$\underset{(1)}{x} = \dfrac{5\lambda}{16}$, $\underset{(2)}{y} = \dfrac{2\lambda}{8}$ $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\lambda = 16$

$\Rightarrow x_0 = 5,\ y_0 = 4 \Rightarrow f(x_0,y_0) = 264$

mínimo local y global

Ejercicio 12

(pag. 246)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max.} & Q(x,y) = 60x^{1/3}y^{2/3} \\ \text{S.a.} & x+y = 120 \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Cóncava

$\longrightarrow$ Convexo

$$\mathrm{Hess}(Q) = \frac{40}{3}\begin{pmatrix} -x^{-5/3}y^{2/3} & x^{-2/3}y^{1/3} \\ x^{-\frac{2}{3}}y^{1/3} & -x^{1/3}y^{4/3} \end{pmatrix}$$

<0 $\quad$ 0

El máximo local coincide con el global.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 20x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = 40x^{1/3}y^{-1/3} - \lambda = 0 \\ (3) & x+y = 120 \end{array}\right\}$$

$\lambda = 20x^{-2/3}y^{2/3} = 40x^{1/3}y^{-1/3} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ x+y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 40,\ y_0 = 80,$

$$\lambda = 40\,(40)^{1/3}(80)^{-1/3} = 40\,(40)^{1/3}(40)^{-1/3}\,2^{-1/3} = \frac{40}{\sqrt[3]{2}} \simeq 31'75$$

$Q(x_0,y_0) = 3809'76$, $\quad \Delta Q \approx \lambda \cdot \Delta b = 31'75 \cdot 3 = 95'25$

La nueva producción máxima ascendería a $Q+\Delta Q \simeq 3809'76 + 95'25$ aproximadamente.

Ejercicio 13

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min. } C(x,y,z) = 2x^3 + xy - 2z - 3x + 8 \\ \text{s.a. } g_1(x,y,z) = x - \frac{1}{3}z = 0 \; ; \; g_2(x,y,z) = z - 2y = 0 \end{array}}$$

$\vec{\nabla} g_1(x,y,z) = (1, 0, -\frac{1}{3})$, $\vec{\nabla} g_2(x,y,z) = (0, -2, 1)$ independientes $\Rightarrow$ no hay ptos. singulares.

$(1, 0, -\frac{1}{3}) = \beta (0, -2, 1)$ IMPOSIBLE

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2x^3 + xy - 2z - 3x + 8 - \lambda_1\left(x - \tfrac{1}{3}z\right) - \lambda_2 (z - 2y)$$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x^2 + y - 3 - \lambda_1 = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda_2 = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = -2 + \frac{1}{3}\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

(4) $x - \frac{1}{3}z = 0$

(5) $z - 2y = 0$ $\Rightarrow x = \frac{2}{3}y$

- $(x_0, y_0, z_0; \lambda_1, \lambda_2) = (\underbrace{-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{9}{4}, -\tfrac{9}{2}}_{\text{negativos}}; \tfrac{33}{4}, \tfrac{3}{4})$ sin sentido económico.

  $C(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{145}{8} = 18'125$

- $(x_0, y_0, z_0; \lambda_1, \lambda_2) = (1, \tfrac{3}{2}, 3; \tfrac{9}{2}, -\tfrac{1}{2})$

  $C(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{5}{2} = 2'5 \leftarrow$ mínimo global

Si lo hacemos por sustitución: $x = \frac{1}{3}z$, $y = \frac{1}{2}z \Rightarrow$

$$f(x,y,z) = \frac{2}{27}z^3 + \frac{1}{6}z^2 - 3z + 8 = h(z)$$

$h'(z) = 0 \Rightarrow$ ~~$z = -9/2$~~ (sin sentido), $\boxed{z = 3}$

$$\frac{6}{27}z^2 + \frac{1}{3}z - 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{72}{27}}}{2\frac{6}{27}} \begin{cases} -9/2 \\ 3 \end{cases}$$

$$h''(z) = \frac{12}{27}z + \frac{1}{3}, \quad h''(3) = \frac{12}{27}\cdot 3 + \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Ejercicio 14

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & C(x,t) = 25x + 20xt + t^2 \\ \text{s.a.} & 800t\,x = 64000 \Rightarrow xt = 80 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 25 + 20t - \lambda t = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial t} = 20x + 2t - \lambda x = 0 \\ (3) & x \cdot t = 80 \end{array}\right\}$$

$(3) \Rightarrow t = \dfrac{80}{x}$

$(1) \Rightarrow \lambda = \dfrac{25+20t}{t} = \dfrac{25}{t} + 20 = \dfrac{25x}{80} + 20$

$(2) \Rightarrow 20x + 2\cdot\dfrac{80}{x} - \left(\dfrac{25x}{80} + 20\right)x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{20x} + \frac{160}{x} - \frac{25}{80}x^2 - \cancel{20x} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{160\cdot 80}{25} \Rightarrow x_0 = 8$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} t_0 = \frac{80}{8} = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{25 + 20\cdot 10}{10} = \frac{45}{2}, \quad C(x_0,t_0) = 1900$$

$$\Delta C \simeq \lambda\, \Delta b = \frac{45}{2}\cdot\left(\frac{64002}{800} - 80\right) = \frac{4509}{160} \simeq 28'18$$

Ejercicio 15

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max.} & V(x,y,p) = \dfrac{-10p^3 + 2xyp}{100} \\ \text{s.a.} & x + y = 60 \end{array}} \quad x,y \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{yp}{50} - \lambda = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{xp}{50} - \lambda = 0 \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial p} = \dfrac{-3p^2}{10} + \dfrac{xy}{50} = 0 \\ (4) & x + y = 60 \end{array}\right\}$$

$(1)-(2) \Rightarrow \boxed{p(x-y) = 0} \Rightarrow$

15.1) $p = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overset{(1,2)}{\Rightarrow} \lambda = 0 \\ \overset{(3)}{\Rightarrow} x\cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0, & y=60 \\ y=0, & x=60 \end{cases} \end{cases}$

15.2) $x = y \overset{(4)}{\Rightarrow} x=30,\ y=30 \overset{(3)}{\Rightarrow} p = 120$

$\overset{(1,2)}{\Rightarrow} \lambda = 864$

$V(0,60,0) = 0, \quad V(60,0,0) = 0, \quad V(30,30,120) = 8640 \leftarrow$ máximo

Teorema de sensibilidad: $\Delta V \simeq \lambda\cdot\Delta b = 864\cdot 1 = 864$

Ejercicio 16

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Opt.} & U(q_A, q_B, q_C) = q_A + 12\ln(q_B q_C) \\ \text{s.a.} & 10 q_A + 12 q_B + 6 q_C = 1000 \end{array}}$$

→ Cóncava.
→ Convexo

$$\text{Hess}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12}{q_B^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12}{q_C^2} \end{pmatrix}$$ semidefinida negativa $\Rightarrow \cap$ Cóncava.

Si hay máximo local, éste será también global.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial L}{\partial q_A} = 1 - 10\lambda = 0 \\ (2) & \frac{\partial L}{\partial q_B} = \frac{12}{q_B} - 12\lambda = 0 \\ (3) & \frac{\partial L}{\partial q_C} = \frac{12}{q_C} - 6\lambda = 0 \\ (4) & 10q_A + 12q_B + 6q_C = 1000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10} \\ \Rightarrow q_B^* = 10 \\ \Rightarrow q_C^* = 20 \\ \Rightarrow q_A^* = 76 \end{array}$$

máximo global

$$U(q_A^*, q_B^*, q_C^*) = 76 + 12\ln(200) = 139'58$$

Ejercicio 17

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Opt.} & U(x,y,z) = 2xy + 4z \\ \text{s.a.} & g_1(x,y,z) = x+y-8=0, \; g_2(x,y,z) = y+z-7=0 \end{array}}$$

→ ni Cóncava ni convexa
→ Convexo no compacto

$\vec{\nabla} g_1 = (1,1,0)$, $\vec{\nabla} g_2 = (0,1,1)$ independientes $\Rightarrow$ no hay puntos singulares.

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial L}{\partial x} = 2y - \lambda_1 = 0 \\ (2) & \frac{\partial L}{\partial y} = 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ (3) & \frac{\partial L}{\partial z} = 4 - \lambda_2 = 0 \\ (4) & x + y - 8 = 0 \\ (5) & y + z - 7 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 = 2y \\ \Rightarrow \lambda_1 = 2x - 4 \\ \Rightarrow \lambda_2 = 4 \end{array} \Big\} \; y = x - 2 \overset{(4)}{\Rightarrow} x_0 = 5, \; y_0 = 3, \overset{(5)}{\;} z_0 = 4$$

$$\lambda_1 = 6$$

$U(x_0, y_0, z_0) = 46$ ¿máximo, mínimo?

$$\boxed{\Delta U \simeq \lambda_1 \Delta b_1 + \lambda_2 \Delta b_2 = 6 \cdot 0'1 - 4 \cdot 0'2 = -0'2}$$

Teorema de sensibilidad.

Para ver si se trata de máximo o mínimo, usemos sustitución:

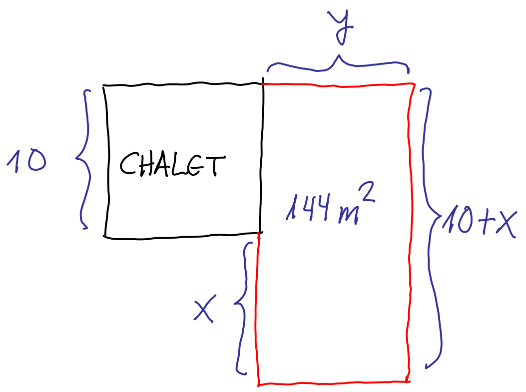
$$\left.\begin{array}{l}(4) \Rightarrow x = 8-y \\ (5) \Rightarrow z = 7-y\end{array}\right\} V(x,y,z) = 2(8-y)y + 4(7-y) = 16y - 2y^2 + 28 - 4y =$$

$$= -2y^3 + 12y + 28 = h(y)$$

$$h'(y) = -4y + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$h''(y) = -4 < 0 \Longrightarrow \underline{\text{máximo}}$$

Ejercicio 18



La restricción es que $y(10+x) = 144$ (área)

El coste de la valla será:

$$C(x,y) = 120\Big(x + 2y + (10+x)\Big) = 120\left(2x + 2y + 10\right)$$

Por lo tanto el problema es:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Min.} & C(x,y) \\ \text{S.a.} & y(10+x) = 144\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 240 - \lambda y = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = 240 - \lambda(10+x) = 0 \\ (3) & y(10+x) = 144\end{array}\right\}$$

$x_0 = 2$, $y_0 = 12$, $\lambda = 20$

$C(x_0, y_0) = 4560$ €

$x_0 + 2y + (10 + x_0) = 38$ metros

Ejercicio 19

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max.} & U(x,y,z) = 4x^2+y^2+z^2-3 \\ \text{S.a.} & Q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=16 \end{array}}$$

$x,y,z \geq 0$

$\to$ Continua $\to$ Compacto $\Big\}$ $\exists$ máximo y mínimo global.

$\vec{\nabla} Q = (2x, 2y, 2z) = (0,0,0) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ no verifica la restricción.

Por lo tanto no hay puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x - 2\lambda x = 0 & \Rightarrow x(4-\lambda)=0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0 & \Rightarrow y(1-\lambda)=0 \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 & \Rightarrow z(1-\lambda)=0 \\ (4) & x^2+y^2+z^2=16 & \Rightarrow x^2+y^2+z^2=16 \end{array}\right\}$$

19.1) $(1) \Rightarrow \lambda = 4 \xRightarrow{(2,3)} y_0 = 0,\ z_0 = 0 \xRightarrow{(4)} x_0 = 4$

$U(x_0, y_0, z_0) = 61$

19.2) $(1) \Rightarrow x_0 = 0 \xRightarrow{(4)} \left\{\begin{array}{l} y^2+z^2=16 \\ y \text{ ó } z \neq 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{(2,3)} \lambda = 1$

En este segundo caso tenemos múltiples puntos estacionarios verificando:

$\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 16 \Rightarrow U(x_0, \bar{y}, \bar{z}) = 4 \cdot 0 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 3 = 16 - 3 = 13 < 61$

Por lo tanto el máximo se da en:

$(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 0)$ con utilidad $U(x_0, y_0, z_0) = 61$

Ejercicio Sean x, y la cantidad de hidratos de carbono y proteínas para una dieta diaria, respectivamente. Sean P_x, P_y los precios por unidad de h.c. y proteínas, respectivamente. Supongamos que $P_x = 1$, $P_y = 2$ y que disponemos de 4 euros para gastar. Supongamos que el consumidor tiene una función utilidad dada por $U(x,y) = x^a \cdot y^b$ donde a, b son las "preferencias". Supongamos que $a = b = 1$ (h.c. igualmente preferidos que prot.)

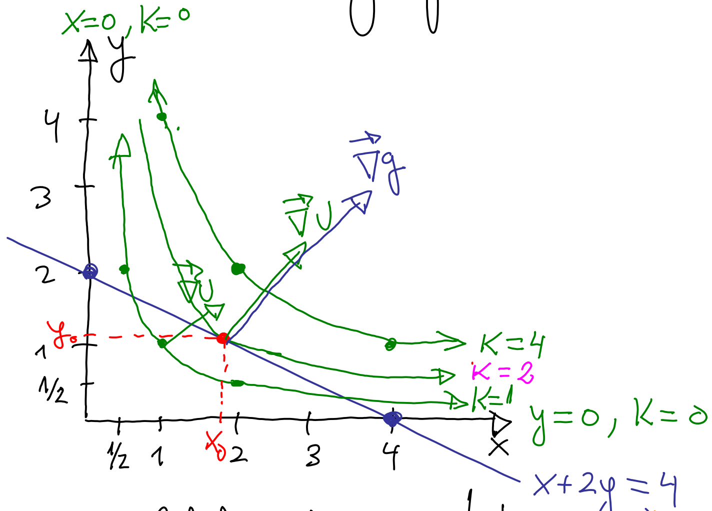
Determinar (x,y) tal que $U(x,y)$ sea máxima.

Maximizar $U(x,y) = x \cdot y$ s.a. $1 \cdot x + 2 \cdot y = 4$, $x, y \geq 0$

$g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$

Solución:

a) Método gráfico



$U(x,y) = x \cdot y = K = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ y = 0 \end{cases}$

$U(x,y) = x \cdot y = K = 1 \Rightarrow y = 1/x$

$U(x,y) = x \cdot y = K = 4 \Rightarrow y = 4/x$

(x_0, y_0) nos da la máxima utilidad $U(x_0, y_0)$

b) Método de sustitución.

$U(x,y) = x \cdot y = (4-2y) \cdot y = 4y - 2y^2 = h(y)$

$h'(y) = 4 - 4y = 0 \Rightarrow y_0 = 1,\; x_0 = 2 \Rightarrow U(2,1) = 2$

$h''(y) = -4 < 0 \Rightarrow (2,1)$ es un máximo global.

c) Condición de tangencia

En el punto $(x,y)=(x_0,y_0)$ se tiene que $\vec{\nabla} U(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$

Constante de proporcionalidad ó parámetro ó multiplicador de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} U(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (y,x) \\ \vec{\nabla} g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (1,2) \end{array}\right\} (y,x) = \lambda(1,2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \lambda \cdot 1 \\ x = \lambda \cdot 2 \\ x+2y=4 \end{array}\right.$$

$2\lambda + 2\lambda = 4$

$\lambda = 1$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = \lambda \cdot 2 = 2 \\ y_0 = \lambda \cdot 1 = 1 \end{array}\right.$$

d) Método de Lagrange.

Función Lagrangiana $L(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda g(x,y)$

$$= x \cdot y - \lambda(x+2y-4)$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = y - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 = x - \lambda \cdot 2 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = -(x+2y-4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ x+2y-4=0 \Rightarrow 2\lambda+2\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

$y_0 = 1$

$x_0 = 2$

¿El máximo local $(2,1)$, es también global?

Conjunto factible: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=4,\ x,y \geq 0\}$ Convexo

$U(x,y) = x \cdot y$, $Hess(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Semidefinida? negativa $\} \not\Rightarrow U(x,y)$ es Cóncava

$0 \quad -1$

¡SI!, se cumple el teorema local-global

Ejercicio | Repetid el ejercicio anterior con $U(x,y) = x^{1/3} y^{2/3}$

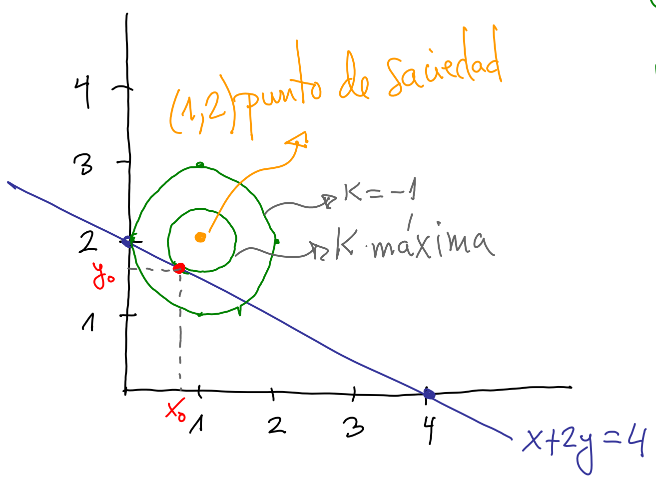
Ejercicio Maximizar $U(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2$
sujeto a: $x + 2y = 4$

La máxima utilidad en ausencia de restricción se alcanza en $(x,y) = (1,2)$.

a) Método gráfico.

$U(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 = \underset{=-r^2}{K} = 0$

$U(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 = K = -1$



b) Método de sustitución:

$x+2y=4 \Rightarrow x = 4-2y \Rightarrow U(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 = \underbrace{-(4-2y-1)^2 - (y-2)^2}_{h(y)}$ $= -(3-2y)^2 - (y-2)^2$

$h'(y) = -2(3-2y)\cdot(-2) - 2(y-2)\cdot 1 = 12 - 8y - 2y + 4 = -10y + 16 = 0$

$\Rightarrow y_0 = 1'6, \quad x_0 = 0'8 \qquad U(x_0,y_0) = -(0'8-1)^2 - (1'6-2)^2$

c) Método de Lagrange

Función Lagrangiana: $L(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda g(x,y)$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 - \lambda(x+2y-4)$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2(x-1)\cdot 1 - \lambda \cdot 1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2(y-2)\cdot 1 - \lambda \cdot 2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x+2y-4) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x+2 = \lambda \\ -2y+4 = 2\lambda \\ x+2y = 4 \end{array}\right\}$$

$$-2y+4 = 2(-2x+2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2y = 0 \\ x+2y = 4 \end{array}\right\}$$
$$5x + 0y = 4$$

$$x_0 = \frac{4}{5} = 0'8 \Rightarrow y = \frac{8}{5} = 1'6$$

$$\lambda = -2\frac{4}{5} + 2 = 2 - \frac{8}{5} = 0'4$$

Ejercicio 8a

pag. 225

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2+y^2+2z^2+4 \\ \text{s.a.} & x+y+z=10 \end{array}}$$

$x^2+y^2+2z^2+4 \rightarrow$ Convexa
$x+y+z=10 \rightarrow$ Convexo

El mínimo local es mínimo global

(1) $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda\cdot 1 = 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda\cdot 1 = 0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 4z - \lambda\cdot 1 = 0$

(4) $x+y+z = 10$

$\underset{(1)}{x} = \frac{\lambda}{2}, \quad \underset{(2)}{y} = \frac{\lambda}{2}, \quad \underset{(3)}{z} = \frac{\lambda}{4} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}}_{\frac{5\lambda}{4}} = 10 \Rightarrow \lambda = 8$

$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2$

$f(4,4,2) = 40$ Mínimo global

Ejercicio 8e

pag. 240

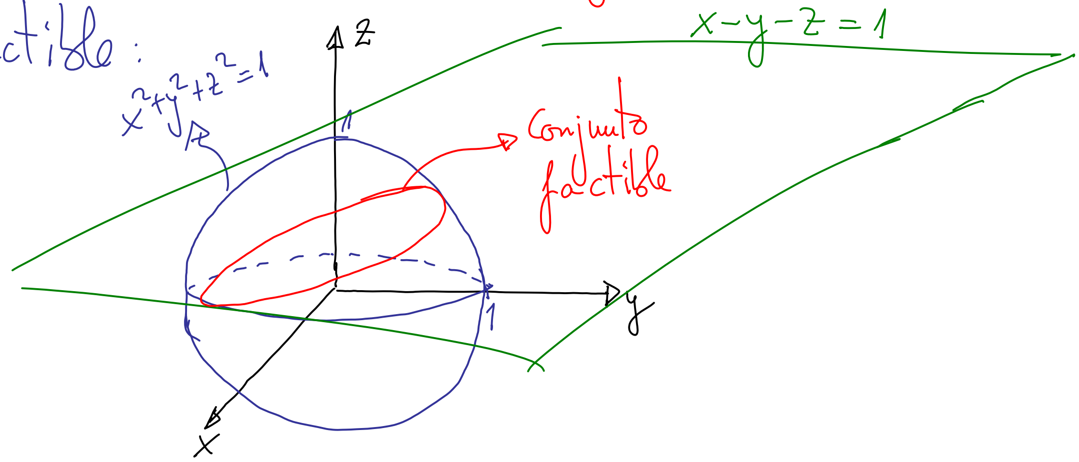
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Opt. } x+y+z \\ \text{s.a. } x^2+y^2+z^2=1,\ x-y-z=1\end{array}}$$

→ Continua

→ Cerrado y acotado. no Convexo

} Weierstrass → ∃ máximo y mínimo global

Conjunto factible:



$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x+y+z - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) - \lambda_2(x-y-z-1)$$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 - 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$

(4) $x^2+y^2+z^2 = 1$

(5) $x-y-z = 1$

(1)+(2) $\quad 2 - 2\lambda_1(x+y) = 0$

(2)−(3) $\quad \boxed{-2\lambda_1(y-z) = 0}$

CASOS:

$\boxed{A}$ $\cancel{\lambda_1 = 0} \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} 2 = 0$ IMPOSIBLE

$\boxed{B}$ $y - z = 0 \begin{cases} (4)\ x^2+y^2+y^2 = x^2+2y^2 = 1 \\ (5)\ x-y-y = x-2y = 1 \end{cases}$ $\quad x = 1+2y$

$\Rightarrow (1+2y)^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1+4y+4y^2+2y^2 = 6y^2+4y+\cancel{1} = \cancel{1}$

$\Rightarrow 6y^2+4y = 0 \begin{cases} y=0,\ z=0,\ x=1;\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1;\ f(1,0,0) = 1 \leftarrow \text{MAX} \\ y = -\frac{2}{3},\ z = -\frac{2}{3},\ x = -\frac{1}{3};\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{3};\ f(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}) = -\frac{5}{3} \end{cases}$

MIN

Teorema de Sensibilidad: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 = b_1 \to 1'1 \\ x-y-z = 1 = b_2 \to 0'9 \end{cases}$

$\Delta f \simeq \lambda_1 \cdot \Delta b_1$ $\quad$ $0'1$: $\lambda_1 = 1 \to = 0'1$; $\quad$ $-0'1$: $\lambda_1 = -1 \to = -0'1$

$\Delta f \simeq \lambda_2 \cdot \Delta b_2$ $\quad$ $-0'1$: $\lambda_2 = -1 \to 0'1$; $\quad$ $\lambda_2 = \frac{1}{3} \to -\frac{0'1}{3}$

Ejercicio 13

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Min. } C(x,y,z) = 2x^3 + xy - 2z - 3x + 8 \\ \text{S.a. } g_1(x,y,z) = x - \frac{1}{3}z = 0 \; ; \; g_2(x,y,z) = z - 2y = 0\end{array}}$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2x^3 + xy - 2z - 3x + 8 - \lambda_1\left(x - \tfrac{1}{3}z\right) - \lambda_2(z - 2y)$$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x^2 + y - 3 - \lambda_1 = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda_2 = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = -2 + \frac{1}{3}\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

(4) $x = \frac{1}{3}z$

(5) $z = 2y$

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}z \\ z = 2y \end{array}\right\} \; x = \frac{2}{3}y$ (4,5)

(1) $\lambda_1 = 6x^2 + y - 3$

(2) $\lambda_2 = -\dfrac{x}{2}$

(3) $-2 + \frac{1}{3}(6x^2 + y - 3) + \frac{x}{2} = 0$

(4,5) $-2 + \frac{1}{3}\left(6x^2 + \frac{3}{2}x - 3\right) + \frac{x}{2} = 0$

$$-2 + 2x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1 + \tfrac{x}{2} = 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

sin sentido económico

$x = 1$, $y = \frac{3}{2}$, $z = 3$; $\lambda_1 = \frac{9}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$C\left(1, \frac{3}{2}, 3\right) =$

¿Máximo o mínimo?