TEMA 2: PROGRAMAS CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

Título de la nota 22/10/2011

MANUEL CALIXTO

Se considera el programa:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(\vec{x}) \\ \text{s.a.} & \left\{\begin{array}{l} g_1(\vec{x}) \leq 0 \\ g_2(\vec{x}) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \leq 0 \end{array}\right. \end{array}}$$

Conjunto factible $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\vec{x}) \leq 0, g_2(\vec{x}) \leq 0, \dots, g_m(\vec{x}) \leq 0\}$

* Diremos que $\vec{a} \in A$ **satura** la restricción $g_i(\vec{x}) \leq 0$ si $g_i(\vec{a}) = 0$
("$\vec{a}$ está en la frontera de A...")

* Diremos que $\vec{a} \in A$ es **regular** cuando
  - $\vec{a}$ no satura ninguna restricción ("punto interior")
  - Si $g_i(\vec{a}) = 0 \ \forall i \in I$ entonces $\{\vec{\nabla} g_i(\vec{a})\}_{i\in I}$ son lin. indep.

en caso contrario se dice que $\vec{a} \in A$ es **singular**.

Ejemplo 1 Estudiar si $\vec{a} = (\pm 1, 0)$ son singulares o regulares en el programa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & y^2 - x \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{array}}$$

$x^2 + y^2 \geq 1 \to$ exterior circunferencia centro $(0,0)$ y radio 1

$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \to$ interior elipse semiejes 1, 2

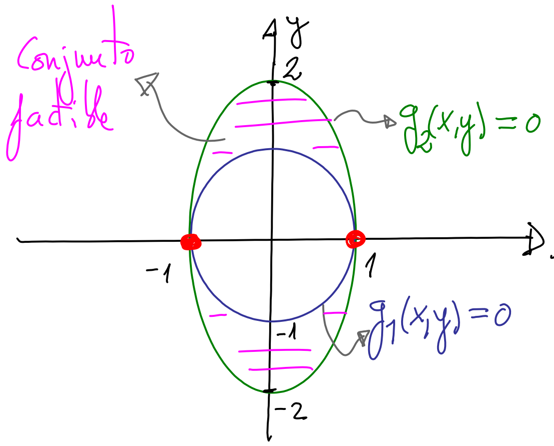
$(\pm1,0)$ saturan

$g_1(x,y) = -x^2 - y^2 + 1 \big|_{(\pm1,0)} = 0$

$g_2(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \big|_{(\pm1,0)} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} g_1(x,y)\big|_{(\pm1,0)} = (-2x, -2y)\big|_{(\pm1,0)} = (\mp 2, 0) \\ \vec{\nabla} g_2(x,y)\big|_{(\pm1,0)} = (2x, \tfrac{1}{2}y)\big|_{(\pm1,0)} = (\pm 2, 0) \end{array}\right\} \text{paralelos}$$

Concluimos por tanto que $\vec{a}=(\pm 1,0)$ son singulares



Nótese que las curvas $g_1(x,y)=0$, $g_2(x,y)=0$ son tangentes en los puntos singulares

Ejemplo 2 Estudiar si $\vec{a}=(0,0)$ es un punto singular o regular del programa:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (x+3)^2+y^2 \\ \text{s.a.} & y-x^3 \leq 0 \\ & -y-x^3 \leq 0 \end{array}}$$

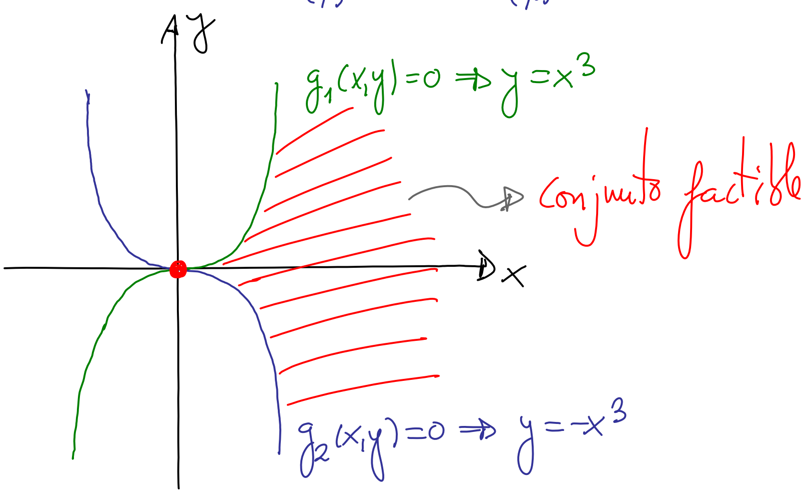
(0,0) Satura

$$g_1(x,y) = y-x^3\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \vec{\nabla} g_1(x,y)\Big|_{(0,0)} = (-3x^2,1)\Big|_{(0,0)} = (0,1)$$

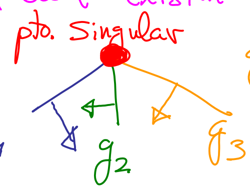
$$g_2(x,y) = -y-x^3\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \vec{\nabla} g_2(x,y)\Big|_{(0,0)} = (-3x^2,-1)\Big|_{(0,0)} = (0,-1)$$

$\Big\}$ paralelos $\Rightarrow$ (0,0) es singular

Nótese que las curvas $g_1(x,y)=0$ y $g_2(x,y)=0$ son tangentes en $\vec{a}=(0,0)$



Intuitivamente, un punto singular es aquel en el cual existen restricciones redundantes (que "sobran"). Por ejemplo:



g_3 es redundante

TEOREMA DE KUHN-TUCKER

Sea $\vec{a}$ un punto regular del programa:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Optimizar } f(\vec{x}) \\ \text{s.a.} \begin{cases} g_1(\vec{x}) \leq 0 \\ g_2(\vec{x}) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \leq 0 \end{cases} \end{array}}$$

Si $\vec{a}$ es mínimo local entonces
máximo

existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (multiplicadores de Kuhn-Tucker)

tales que:

1) $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{a}) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\vec{a}) + \ldots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m(\vec{a})$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \leq 0$
≥ 0

3) Si $g_i(\vec{a}) \neq 0$ (no saturada, "$\vec{a}$ interior") entonces $\lambda_i = 0$

Si usamos la función Lagrangiana $L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \lambda_2 g_2(\vec{x}) - \ldots - \lambda_m g_m(\vec{x})$
las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden escribir como:

1) $\dfrac{\partial L(\vec{a}, \vec{\lambda})}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \longleftrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{a}) + \ldots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m(\vec{a})$

2) $\lambda_i \, g_i(\vec{a}) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de} \\ \text{"holgura complementaria"} \end{array} \right.$

3) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \leq 0$ (mínimo local)
≥ 0 (máximo local)

Ejercicio 1

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = 2x - x^3 \\ \text{s.a.} & 0 \leq x \leq 3 \end{array}} \longrightarrow \begin{cases} g_1(x) = x - 3 \leq 0 \\ g_2(x) = -x \leq 0 \end{cases}$$

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x) = 2x - x^3 - \lambda_1 (x-3) - \lambda_2 (-x)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 - 3x^2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

2) $\lambda_1 g_1(x) = \lambda_1 (x-3) = 0$, $\quad \lambda_2 g_2(x) = \lambda_2 (-x) = 0$

3) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$

Casos:

a) $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \Rightarrow x \in (0,3)$ "punto interior"

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \underline{+}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$-\sqrt{\frac{2}{3}} \notin [0,3]$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^3 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(2 - \tfrac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)\Big|_{x=\sqrt{\frac{2}{3}}} = -6x\Big|_{x=\sqrt{\frac{2}{3}}} < 0 \Rightarrow \text{máximo local}$$

b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $(\lambda_2 g_2(x) = 0) \Rightarrow g_2(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 0$ "frontera"

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 - 3x^2 + \lambda_2 = 0 \underset{x=0}{\Longrightarrow} \lambda_2 = -2 < 0$$

c) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $(\lambda_1 g_1(x) = 0) \Rightarrow g_1(x) = 0 \Rightarrow x = 3$, $f(3) = -21$

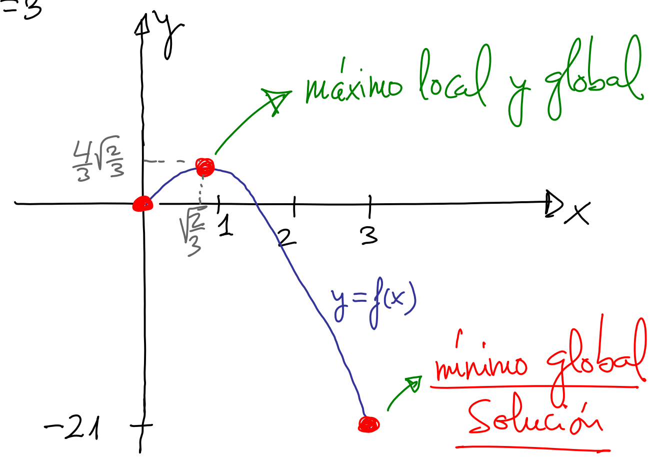
"frontera"

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 - 3x^2 - \lambda_1 = 0 \underset{x=3}{\Rightarrow} \lambda_1 = -25 < 0$$

mínimo

solución

Gráficamente:



Ejercicio 2a

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2x^2 + y^3 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}}$$

Resuelto en pags. 267, 273 libro de texto.

Solución: $(x, y) = (\pm 1, 0)$, $f(\pm 1, 0) = 2$, $\lambda = 2 > 0$

Ejercicio 2b

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + 4y^2 - 2xy \\ \text{s.a.} & x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{array}}$$

pag. 275, 279

Solución: $(0,0)$ mínimo global , $\left(\mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ máximo global.

Ejercicio 3

pag 281

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a.} & \left\{\begin{array}{l} x + y \leq 6 \\ 2x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \end{array}}$$

→ Convexa Continua

→ Convexo Compacto

Solución: $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ mínimo local y global , $(6, 0)$ máximo global

Ejercicio 4a

pag 319

$$\text{Minimizar } (x+3)^2+y^2$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} -x^3+y \leq 0 \\ -x^3-y \leq 0 \end{cases}$$

Solución: $(0,0)$ (punto singular.)

Ejercicio 4b

pag 319

$$\text{Minimizar } y^2-x$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+\frac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$$

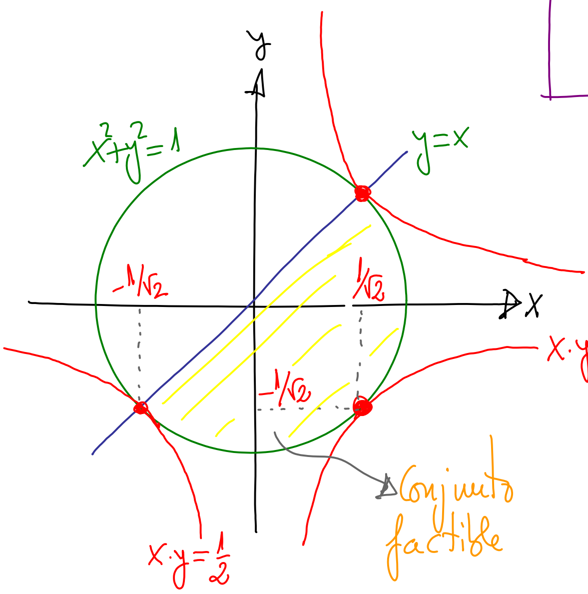
Solución: $(1,0)$: punto singular que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo

Ejercicio 4c

$$\text{Optimizar } xy$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \leq x \end{cases}$$

$\to$ Continua.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y) = x^2+y^2-1 \leq 0 \\ g_2(x,y) = y-x \leq 0 \end{array}\right\} \text{Compacto}$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} g_1(x,y) = (2x,2y) \\ \vec{\nabla} g_2(x,y) = (-1,1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{linealmente depend.} \\ \text{si } x=-y=a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(a,-a) = 2a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_2(a,-a) = -2a=0 \Rightarrow a=0 \end{array}\right\} \text{imposible}$$

$\Rightarrow$ no hay puntos singulares.

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x\cdot y - \lambda_1(x^2+y^2-1) - \lambda_2(y-x)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$

2) $\lambda_1 g_1(x,y) = \lambda_1 \cdot (x^2+y^2-1) = 0, \quad \lambda_2 g_2(x,y) = \lambda_2 \cdot (y-x) = 0$

3) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ (mínimo), $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (máximo)

Casos:

a) $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \Rightarrow (x,y)$ puntos interiores

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0), \; f(0,0) = 0$

b) $\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow g_2(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - \cancel{2\lambda_1 x} + \lambda_2 = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \cancel{2\lambda_1 y} - \lambda_2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0), \; \lambda_2 = 0, \; f(0,0) = 0$

c) $\lambda_2 = 0, \; \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow g_1(x,y) = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda_1 x + \cancel{\lambda_2} = 0$, (2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda_1 y - \cancel{\lambda_2} = 0 \Rightarrow x \overset{(2)}{=} 2\lambda_1 y \overset{(1)}{=} \dfrac{y}{2\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2}$

$x^2+y^2=1$

- $\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right), \; f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ <u>máximo</u>
- $\lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y + x = 0 \Rightarrow (x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ <u>mínimo</u>

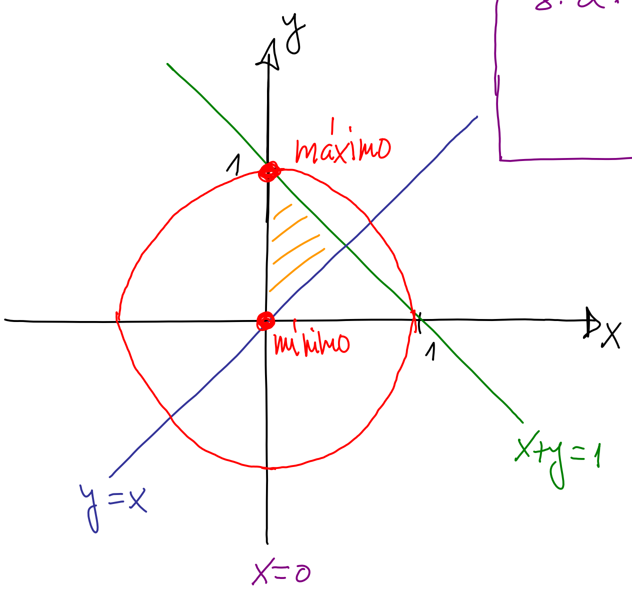
"En realidad el problema sólo nos pide verificar que $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo y mínimo"

Ejercicio 4d

Optimizar x^2+y^2 $\rightarrow$ Continua, Convexa

s. a. $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y) = x+y-1 \leq 0 \\ g_2(x,y) = x-y \leq 0 \\ g_3(x,y) = -x \leq 0 \end{array}\right\} \text{Compacto}$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} g_1(x,y) = (1,1) \\ \vec{\nabla} g_2(x,y) = (1,-1) \\ \vec{\nabla} g_3(x,y) = (-1,0) \end{array}\right\} \text{linealmente independientes dos a dos.} \Rightarrow$$

no hay puntos singulares.

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = x^2+y^2 - \lambda_1(x+y-1) - \lambda_2(x-y) - \lambda_3(-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Casos:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$, $f(0,0) = 0$

b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} g_2(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \\ g_3(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ igual que antes

c) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} g_1(x,y) = 0 \Rightarrow x+y = 1 \\ g_3(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,1)$, $f(0,1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \cancel{2x} - \lambda_1 - \cancel{\lambda_2} + \lambda_3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y^{=1} - \lambda_1 + \cancel{\lambda_2} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda_3 = \lambda_1 = 2 > 0 \\ \lambda_1 = 2 > 0 \end{array}\right\} \text{Verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo}$$

d) $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} g_1(x,y) = 0 \Rightarrow x+y = 1 \\ g_2(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$ $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x^{=1/2} - \lambda_1 - \lambda_2 + \cancel{\lambda_3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y^{=1/2} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{array}\right\} \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$$

e) $\lambda_1=0=\lambda_2$, $\lambda_3\neq 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \cancel{2x}-\cancel{\lambda_1}-\cancel{\lambda_2}+\lambda_3=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y-\cancel{\lambda_1}+\cancel{\lambda_2}=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y=0 \\ \lambda_3=0\end{array}$

igual que el caso a)

f) $\lambda_1=0=\lambda_3$, $\lambda_2\neq 0 \Rightarrow x=y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\overset{=y}{x}-\cancel{\lambda_1}-\lambda_2+\cancel{\lambda_3}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y-\cancel{\lambda_1}+\lambda_2=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (x,y)=(0,0) \\ \lambda_2=0\end{array}$

igual que el caso a)

g) $\lambda_2=0=\lambda_3$, $\lambda_1\neq 0 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\overset{=1-y}{x}-\lambda_1-\cancel{\lambda_2}+\cancel{\lambda_3}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y-\lambda_1+\cancel{\lambda_2}=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \lambda_1=1\end{array}$

igual que el caso d)

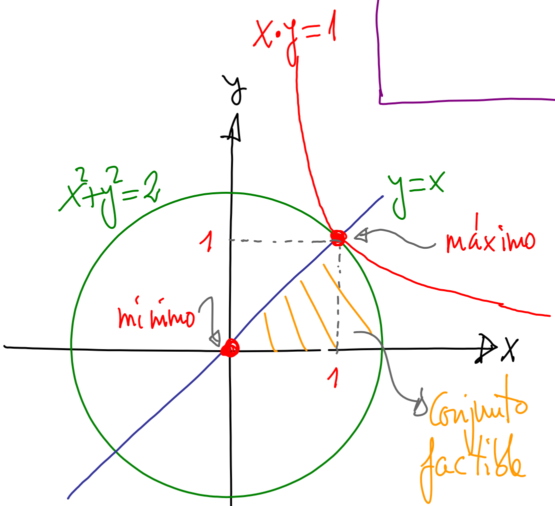
Resumiendo $\begin{cases} (x,y)=(0,1) & \text{máximo global} \\ (x,y)=(0,0) & \text{mínimo global}\end{cases}$

"En realidad el problema sólo nos pide verificar que (0,0) y (0,1) verifican las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo y máximo"

Ejercicio 4e

Optimizar xy

s.a. $\begin{cases} x^2+y^2\leq 2 \rightarrow g_1(x,y)=x^2+y^2-2\leq 0 \\ y\geq 0 \rightarrow g_2(x,y)=-y\leq 0 \\ x\geq y \rightarrow g_3(x,y)=y-x\leq 0\end{cases}$



$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} g_1(x,y)=(2x,2y) \\ \vec{\nabla} g_2(x,y)=(0,-1) \\ \vec{\nabla} g_3(x,y)=(-1,1) \end{array}\right\}$ las tres restricciones no son nunca tangentes

no hay puntos singulares

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=xy-\lambda_1(x^2+y^2-2)-\lambda_2(-y)-\lambda_3(y-x)$$

Veamos si los puntos (1,1) y (0,0), obtenidos gráficamente, satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda_1 x + \lambda_3 = 0 \ , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda_1 y + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

1) $(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 + \lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 0, \ \lambda_2 = 0$

$f(0,0) = 0$

De la relación de holgura complementaria: $\lambda_1 g_1(x,y) = 0 \Rightarrow \lambda_1(\underbrace{x^2}_{=0} + \underbrace{y^2}_{=0} - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

El resultado es compatible con $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0 \ (\text{mínimo}) \\ \quad y \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \ (\text{máximo}) \end{cases}$

Pero gráficamente vemos que (0,0) es mínimo.

2) $(x,y)=(1,1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \geq 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \geq 0 \\ \lambda_2 = 0 \geq 0 \end{array}\right\}$ (1,1) es máximo

$f(1,1) = 1$

Holgura complementaria: $\lambda_2(-\underbrace{y}_{=1}) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \geq 0$

Ejercicio 4f

Pag. 338

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Maximizar } -(x-4)^2 - y^2 \\ \text{s.a.} \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-y \leq 2 \\ y^2 \leq x+4 \end{cases} \end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar } (x-4)^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-y \leq 2 \\ y^2 \leq x+4 \end{cases} \end{array}}$$

Solución: $(x,y)=(3,1)$, $f(3,1) = -(3-4)^2 - 1^2 = -2$

Ejercicio 5

Optimizar $2x+y$

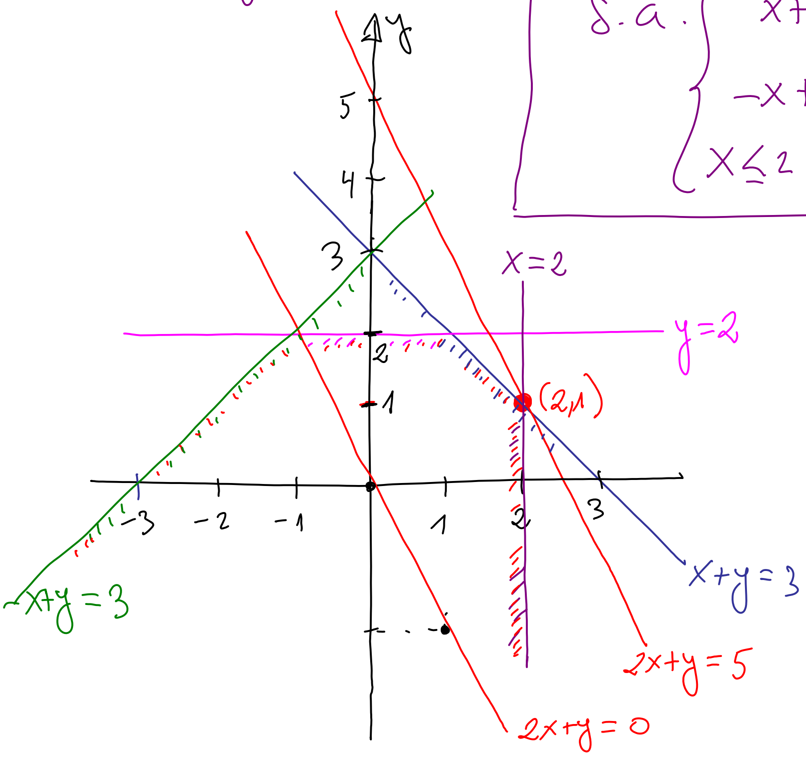
s.a. $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ -x+y \leq 3 \\ x \leq 2,\ y \leq 2 \end{cases}$

$g_1(x,y) = x+y-3 \leq 0$

$g_2(x,y) = -x+y-3 \leq 0$

$g_3(x,y) = x-2 \leq 0$

$g_4(x,y) = y-2 \leq 0$



$2x+y = c \begin{cases} =0 \Rightarrow y=-2x,\ (0,0),\ (1,-2) \\ =5 \Rightarrow y=-2x+5,\ (2,1),\ (0,5) \end{cases}$

- $(2,1)$ es máximo global
  $f(2,1) = 5$

- No existe mínimo global $(-\infty)$
  (La región factible no es acotada)

El problema pide comprobar si $\vec{a} = (-5,-2), (0,3)$ verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

1) $g_1(-5,-2) = -10 \leq 0$, $\underset{\text{(Satura)}}{g_2(-5,-2) = 0 \leq 0}$, $g_3(-5,-2) = -7 \leq 0$, $g_4(-5,-2) = -4 \leq 0$

$(-5,-2)$ cae dentro de la región factible y satura $g_2(x,y)$

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = 2x+y-\lambda_1(x+y-3)-\lambda_2(-x+y-3)-\lambda_3(x-2)-\lambda_4(y-2)$$

1.a) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2-\cancel{\lambda_1}+\lambda_2-\cancel{\lambda_3} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1-\cancel{\lambda_1}-\lambda_2-\cancel{\lambda_4} = 0$

1.b) $\lambda_1(x+y-3)=0$, $\lambda_2(-x+y-3)=0$, $\lambda_3(x-2)=0$, $\lambda_4(y-2)=0$

$(x,y) = (-5,-2) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0 \xRightarrow{1.a)} \lambda_2 = -2,\ \lambda_2 = 1$ (Contradicción)

$\Rightarrow (-5,-2)$ no verifica las condiciones de Kuhn-Tucker.

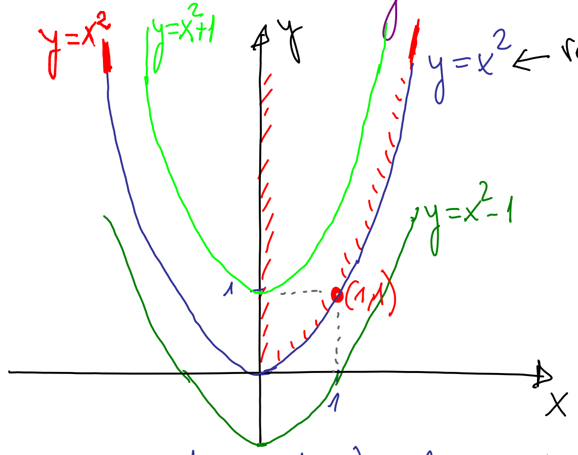
2) $g_4(0,3) = 3-2 = 1 \not\leq 0 \Rightarrow (0,3)$ no está dentro de la región factible.

Comprobar vosotros que $(1,2)$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker del máximo. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0)$

Ejercicio 6 Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar } y - x^2 \\ \text{s.a. } x^2 - y \leq 0 \\ \qquad x, y \geq 0 \end{array}}$$

Comprobar que $(1,1)$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker y es mínimo global del programa.



$$f(x,y) = y - x^2 = \begin{cases} -1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \\ 0 \Rightarrow y = x^2 \\ 1 \Rightarrow y = x^2 + 1 \end{cases} \text{Curvas de nivel}$$

hay infinitos mínimos $(x,y) = (x, x^2)$, $x \geq 0$

ya que la curva de nivel $y = x^2$ satura ("es tangente") la restricción $y \leq x^2$. No hay máximo (∞).

Veamos que efectivamente el punto $(1,1)$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = y - x^2 - \lambda_1(x^2 - y) - \lambda_2(-x) - \lambda_3(-y)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0$

d) $\lambda_1(x^2-y)=0$, $\lambda_2(x)=0$, $\lambda_3(y)=0$ holgura

Si $(x,y)=(1,1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2\cdot 1 - 2\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \end{cases}$

holgura $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Compatible con mínimo (tal y como sospechábamos por el método gráfico)

Ejercicio 7

pag. 332

$Hess(f) = \begin{pmatrix} \overset{<0}{-2} & 0 \\ 0 & \overset{>0}{-2e^{y^2}-4y^2e^{y^2}} \end{pmatrix}$ def. negativa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2-(x-1)^2-e^{y^2} \\ \text{s.a.} & x^2+y^2 \le 1 \end{array}}$$

$\to$ Cóncava, Continua.

$\to$ Convexo, compacto

Programa Convexo: Si hay un máximo local, éste será también global

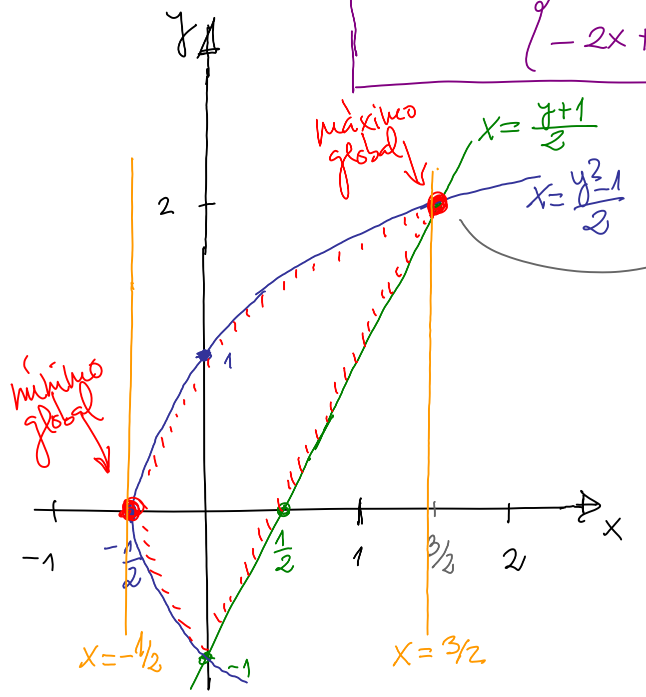
Solución: $(x,y)=(1,0)$, $\lambda=0$ máximo global.

Ejercicio 8

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x^3+3 \\ \text{s.a.} & \begin{cases} 2x-y-1 \le 0 \\ -2x+y^2-1 \le 0 \end{cases} \end{array}}$$

$\to$ Continua

$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y) = 2x-y-1 \le 0 \\ g_2(x,y) = -2x+y^2-1 \le 0 \end{array}\right\}$ Compacto



$\frac{y^2-1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = 2, -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, 0$

Curvas de nivel:

$x^3+3=c \Rightarrow x^3 = 3+c \Rightarrow x = \sqrt[3]{3+c} = K$

rectas paralelas al eje de ordenadas

- El problema pide demostrar que no es un programa convexo.

1) El conjunto factible es convexo (es intersección de convexos)

2) $f(x,y) = x^3+3$ $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $6x \begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ <0 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Como, en el conjunto factible, x puede tomar valores entre $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, se tiene que $Hf(x,y)$ es indefinida $\Rightarrow f(x,y)$ no es ni cóncava ni convexa.

- El problema también pide demostrar que existe mínimo global.
En efecto, como el conjunto factible es compacto y la función objetivo $f(x,y) = x^3+3$ es continua, el teorema de Weierstrass nos asegura que existe máximo y mínimo global.
Gráficamente vemos que el $(-\frac{1}{2}, 0)$ es mínimo y $(\frac{3}{2}, 2)$ es máximo.

Ejercicio 9

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Optimizar } 4x+4y-12 \\ \text{s.a. } \begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2 \leq 8 \\ x-y \leq 5 \end{cases} \end{array}}$$

→ Continua, cóncava y convexa

→ Compacto, convexo

pag. 284

Solución: $\begin{cases} (x,y) = (4,-1) & \text{máximo global} \\ (x,y) = (0,-5) & \text{mínimo global} \end{cases}$

Ejercicio 10 | Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar } a(x^2+y^2) \\ \text{s.a.} \begin{cases} x^2+y^2 \le 25 \\ x+2y \le 10 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \end{array}} \Big\} \text{Convexo, Compacto}$$

¿para qué valores de "a" el punto $(0,0)$ es solución?. Resolver para $a<0$.

1) Si $a>0 \Rightarrow f(x,y)$ es convexa $\Rightarrow$ el mínimo local es global

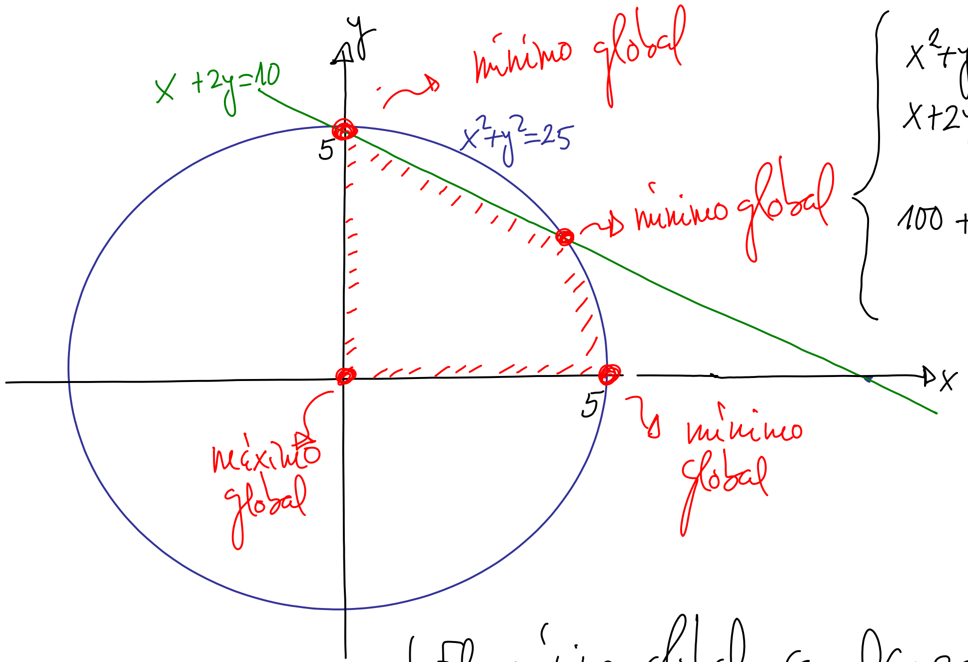
2) Si $a<0 \Rightarrow f(x,y)$ es cóncava $\Rightarrow$ el máximo local es global.

Si $a>0$, $\text{Min}\{f(x,y)\}=0$ y se alcanza en $(x,y)=(0,0)$

Si $a<0$, $\text{Max}\{f(x,y)\}=0$ y se alcanza en $(x,y)=(0,0)$

Por lo tanto, $(x,y)=(0,0)$ es mínimo si y sólo si $a>0$.

Tomando $a<0 \Rightarrow \text{Min}\{a(x^2+y^2)\} = \text{Max}\{-a(x^2+y^2)\}$:



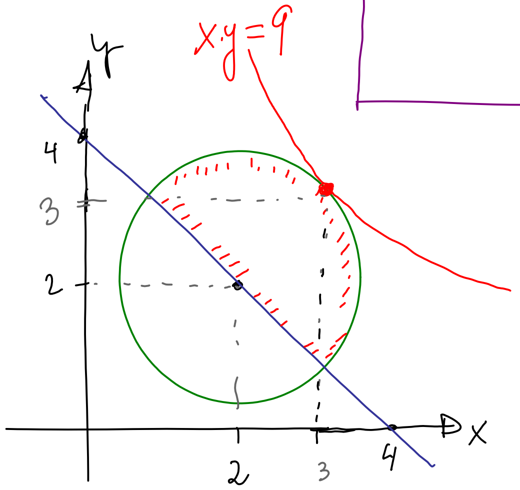
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+2y=10 \Rightarrow x=10-2y \end{cases} \Rightarrow (10-2y)^2+y^2=25$$

$$100+4y^2-40y=25 \Rightarrow \begin{cases} y=5, x=0 \\ y=3, x=4 \end{cases}$$

Resumiendo: $\begin{cases} \text{- El mínimo global se alcanza en } (0,5), (4,3) \text{ y } (5,0) \quad f(x,y)=a\cdot 25<0 \\ \text{- El máximo global se alcanza en } (0,0), \ f(0,0)=0 \end{cases}$

Ejercicio 11

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maximizar } \ln(xy)\\ \text{s.a. } (x-2)^2+(y-2)^2\le 2\\ \qquad x+y\ge 4\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l}\text{Maximizar } xy\\ \text{s.a. } (x-2)^2+(y-2)^2\le 2\\ \qquad x+y\ge 4\end{array}}$$



$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-2)^2=2\\ x=y\end{array}\right\} \Rightarrow 2(x-2)^2=2 \Rightarrow (x-2)=\pm 1$$

$$x=3, \cancel{1} \Rightarrow y=3$$

$$x\cdot y=3\cdot 3=9$$

$(x,y)=(3,3)$ es máximo global.

a) ¿Son (2,2), (3,3) vértices o puntos extremos? SI

b) ¿Es un programa convexo? NO ya que $Hess f(x,y)$ es indefinida.

Ejercicio 12

Dado el programa

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Minimizar } x^2-y\\ \text{s.a. } x^2+y^2\le 4\\ \qquad y\ge 1\end{array}}$$

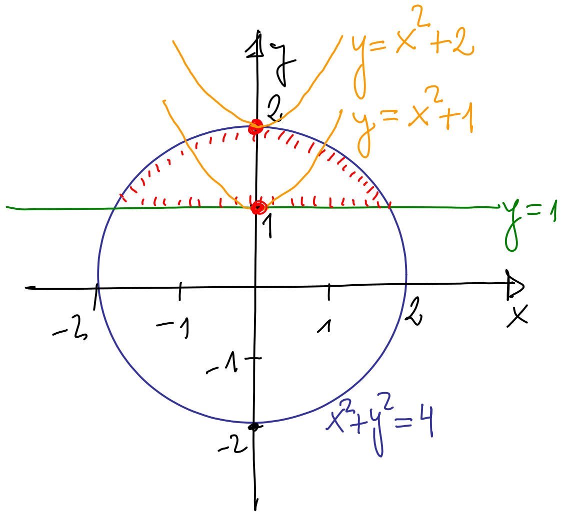
Convexa, Continua.

Compacto
Convexo

a) Comprobar si (0,2) es un punto regular

b) ¿Satisface las condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo local?

c) Justificar dónde se alcanza el mínimo global



$g_1(x,y)=x^2+y^2-4\le 0, \quad g_2(x,y)=1-y\le 0$

$g_1(0,2)=0$, $g_2(0,2)=-1\ne 0$

(0,2) satura (0,2) no satura.

$\Rightarrow$ (0,2) es regular

Curvas de nivel : $x^2-y=c \Rightarrow y=x^2-c$

Gráficamente se ve que $\begin{cases} (0,2) \text{ es un mínimo global } f(0,2)=-2 \\ (0,1) \text{ es un máximo global } f(0,1)=-1 \end{cases}$

b) $L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2-y-\lambda_1(x^2+y^2-4)-\lambda_2(1-y)$

Condiciones de Kuhn-Tucker de mínimo local:

b.1) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-2\lambda_1 x=0, \dfrac{\partial L}{\partial y}=-1-2\lambda_1 y+\lambda_2=0$

b.2) $\lambda_1(x^2+y^2-4)=0, \quad \lambda_2(1-y)=0$

b.3) $\lambda_1,\lambda_2\le 0$

Veamos si $(x,y)=(0,2)$ las verifica:

b.1) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=2\cdot 0-2\lambda_1\cdot 0=0, \dfrac{\partial L}{\partial y}=-1-2\lambda_1\cdot 2+\lambda_2=0$

b.2) $\lambda_1(\underbrace{0^2+2^2-4}_{0})=0, \quad \lambda_2(1-2)=0 \Rightarrow \lambda_2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-1/4$

Como $\lambda_1,\lambda_2\le 0 \Rightarrow (0,2)$ verifica las condiciones de mínimo local.

c) Como el conjunto factible es convexo y la función objetivo es convexa, (0,2) es también mínimo global.

Ejercicio 13

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Maximizar } U(x,y) = x^{1/3} y^{1/2} \\ \text{s.a.} \quad p_1 x + p_2 y \leq M \end{array}}$$

$U(x,y)$ → Cóncava.

$p_1 x + p_2 y \leq M$ → Convexo

$$L(x,y,\lambda) = x^{1/3} y^{1/2} - \lambda (p_1 x + p_2 y - M)$$

a) $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{1/2} - \lambda p_1 = 0$ (1), $\quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} x^{1/3} y^{-1/2} - \lambda p_2 = 0$ (2)

b) $\lambda (p_1 x + p_2 y - M) = 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$

Casos:

i) $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} \overset{(1)}{=} \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{1/2} = 0, \; \frac{\partial L}{\partial y} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2} x^{1/3} y^{-1/2} = 0$ imposible.

ii) $\lambda \neq 0 \Rightarrow p_1 x + p_2 y - M \overset{(3)}{=} 0$

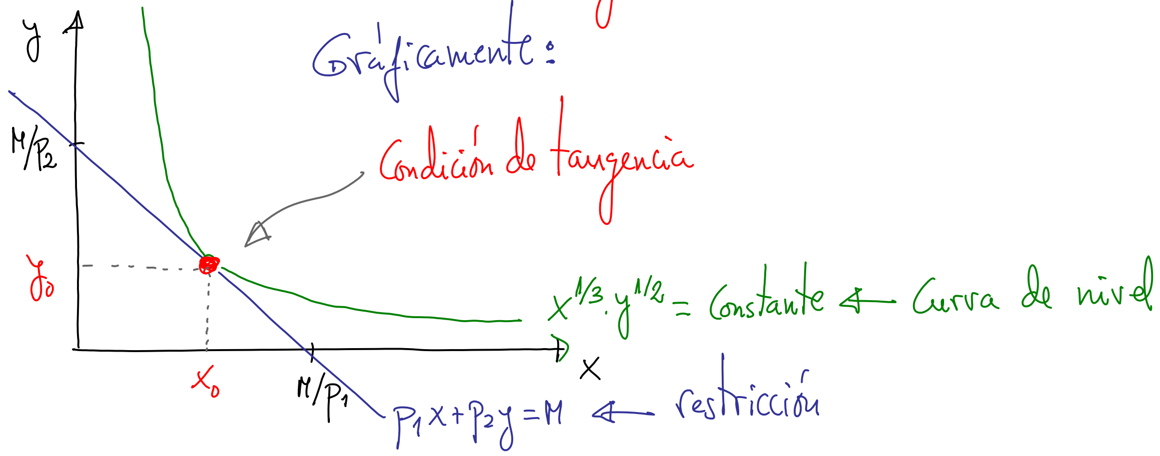
$$\lambda \overset{(1)}{=} \frac{1}{3p_1} x^{-2/3} y^{1/2} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2p_2} x^{1/3} y^{-1/2} \Rightarrow \frac{1}{3p_1} y = \frac{1}{2p_2} x \Rightarrow y = \frac{3p_1}{2p_2} x$$

$$p_1 x + p_2 y = M \Rightarrow p_1 x + \cancel{p_2} \frac{3p_1}{2\cancel{p_2}} x = M \Rightarrow x_0 = \frac{2M}{5p_1} \Rightarrow y_0 = \frac{3M}{5p_2}$$

$$\Rightarrow \lambda = 5^{1/6} / (2^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} M^{1/6} p_1^{1/3} p_2^{1/2}) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo local}}$$

Como $U(x,y)$ es cóncava y el conjunto factible es convexo, se trata de un <u>máximo</u> <u>global</u>.

Gráficamente:



Ejercicio 14

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C(K,L) = 2K + 4L \\ \text{s.a.} & g(K,L) = -8K^{1/4}L^{1/2} + Q_0 \leq 0 \end{array}}$$

$$\mathcal{L}(K,L) = C(K,L) - \lambda g(K,L) = 2K + 4L + \lambda\left(8K^{1/4}L^{1/2} - Q_0\right)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

a) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 2 + \lambda\left(2K^{-3/4}L^{1/2}\right) = 0 \;(1)$, $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 4 + \lambda\left(4K^{1/4}L^{-1/2}\right) = 0 \;(2)$

b) $\lambda\left(8K^{1/4}L^{1/2} - Q_0\right) = 0$

Veamos directamente el caso $\lambda \neq 0 \Rightarrow 8K^{1/4}L^{1/2} \underset{(3)}{=} Q_0 \Rightarrow$

$$\lambda \overset{(1)}{=} -K^{3/4}L^{-1/2} \overset{(2)}{=} -K^{-1/4}L^{1/2} \Rightarrow K = L \overset{(3)}{\Rightarrow} 8K^{3/4} = Q_0 \Rightarrow$$

$$K = (Q_0/8)^{4/3}, \quad L = (Q_0/8)^{4/3}, \quad \lambda = -(Q_0/8)^{1/3} < 0$$

Ejercicio 15

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U(x,y) = x^2 + y \\ \text{s.a.} & g_1 = x(3-x) + y \geq 2 \\ & g_2 = x^2 + y^2 \leq 4 \end{array}}$$

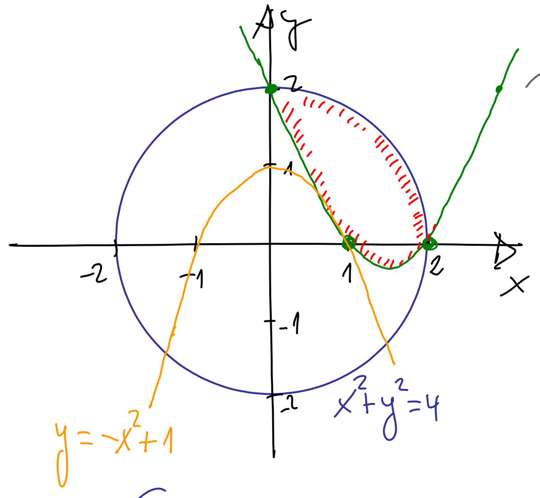
$\to$ Continua, Convexa.

$\}$ Compacto, Convexo

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y - \lambda_1\left(2 - x(3-x) - y\right) - \lambda_2\left(x^2 + y^2 - 4\right)$$

a) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1(3-2x) - 2\lambda_2 x = 0$, $\quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0$

b) $\lambda_1\left(2 - x(3-x) - y\right) = 0$, $\quad \lambda_2\left(x^2 + y^2 - 4\right) = 0$



$\rightsquigarrow y = x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} < {2 \atop 1}$

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{9}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}$

Es complicado averiguar gráficamente dónde está el máximo...

Casos:

i) $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \Rightarrow$ interior de la región factible

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x = 0 \,,\; \frac{\partial L}{\partial y} = 1 = 0 \Rightarrow$ imposible

ii) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow (x,y) = (0,2), (2,0)$

• $(x,y) = (0,2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \cancel{2x} + \lambda_1(3-\cancel{2x}) - 2\lambda_2 \cancel{x} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1/4 \end{cases}$ posible mínimo

$U(0,2) = 2$

• $(x,y) = (2,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\cdot 2 + \lambda_1(3-2\cdot 2) - 2\lambda_2 \cdot 2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \cdot \cancel{0} \end{cases}$ $4-4-4\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$, $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ posible máximo

$U(2,0) = 4$

iii) $\lambda_1 = 0,\; \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \cancel{\lambda_1}(3-2x) - 2\lambda_2 x = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \cancel{\lambda_1} - 2\lambda_2 y = 0$

$\Big\}$ $x(1-\lambda_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\; y = \oplus 2,\; \lambda_2 = -1/4 \\ \lambda_2 = 1,\; y = \frac{1}{2},\; x = \oplus\frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

$2\lambda_2 y = 1$

obtenido en ii)

$U\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{4}$

iv) $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1(3-2x) - 2\cancel{\lambda_2}x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 - 2\cancel{\lambda_2}y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 2x-(3-2x) = 4x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4},\ y = \frac{5}{16} \\ \Rightarrow \lambda_1 = -1 \end{array}$$

$$f\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{16}\right) = \frac{17}{16}$$

Conclusión:

$$\left\{\begin{array}{llll} (2,0), & \lambda_1 = 1, & \lambda_2 = 0, & U(2,0) = 4 \\ (0,2), & \lambda_1 = 0, & \lambda_2 = -\frac{1}{4}, & U(0,2) = 2 \\ \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right), & \lambda_1 = 0, & \lambda_2 = 1, & U\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4} \to \text{máximo global} \\ \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{16}\right), & \lambda_1 = -1, & \lambda_2 = 0, & U\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{16}\right) = \frac{17}{16} \to \text{mínimo} \end{array}\right.$$

Ejercicio 16

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar } \quad R(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 \\ \text{s.a.} \begin{cases} x+y+z \leq 20 \\ 2x+5y+4z \geq 61 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

→ Convexa

Convexo

$$L(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \lambda_1(x+y+z-20) - \lambda_2(61-2x-5y-4z) - \lambda_3(-x) - \lambda_4(-y) - \lambda_5(-z)$$

Condiciones de tangencia:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 6y - \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 4z - \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_5 = 0$$

Condiciones de holgura complementaria:

$$\lambda_1(x+y+z-20) = 0$$

$$\lambda_2(2x+5y+4z-61) = 0$$

$$\lambda_3(-x) = 0$$

$$\lambda_4(-y) = 0$$

$$\lambda_5(-z) = 0$$

Tenemos 8 ecuaciones con 8 incógnitas: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$

Casos:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 = 0 \Rightarrow$ interior de la región factible.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 6y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 4z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{(x,y,z) = (0,0,0)} \text{ no cumple la } 2^{a} \text{ restricción}$$

2) Existen multitud de casos. Pensando un poco, vemos que "lo menos arriesgado" consiste en "conformarse con el mínimo rendimiento posible", es decir: $2x+5y+4z = 61 \Longrightarrow$ saturar la segunda restricción, con lo cual:

$\lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2\lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 6y + 5\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 4z + 4\lambda_2 = 0 \\ 2x+5y+4z &= 61 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to x = -\lambda_2 \\ &\to y = -\frac{5}{6}\lambda_2 \\ &\to z = -\lambda_2 \\ &-2\lambda_2 - \frac{25}{6}\lambda_2 - 4\lambda_2 = 61 \Rightarrow \lambda_2 = -6 < 0 \ \underline{\text{mínimo local}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\to x = 6 \\ &\to y = 5 \\ &\to z = 6 \end{aligned}$$

Como $R(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2$ es convexa y el conjunto factible es convexo (intersección de convexos), entonces el mínimo local obtenido coincide con el mínimo global. La solución $(x,y,z) = (6,5,6)$ conlleva un riesgo de $R(6,5,6) = 183$ y supone invertir $x+y+z = 6+5+6 = 17$ y ahorrar $20-17 = 3$.

Nótese que éste caso es equivalente a un problema sin restricciones. En efecto, despejando x de: $2x+5y+4z=61 \Rightarrow x = \dfrac{61-5y-4z}{2}$

$$R(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2 = \left(\frac{61-5y-4z}{2}\right)^2 + 3y^2+2z^2 = r(y,z)$$

y, z: libres

problema sin restricciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{hacerlo}}{\Longrightarrow} (y,z)=(6,5) \Rightarrow x = \frac{61-5y-4z}{2} = 6$$

obteniendo el mismo resultado que antes.

$\times\times\times$

Aunque el problema no lo pide, nos podríamos plantear la siguiente cuestión:

– ¿Sería más o menos arriesgado el desear obtener un rendimiento total de 60 u.m.?

Dicho de otra manera: si disminuimos nuestras pretensiones de ganancia de 61 a 60, ¿aumenta o disminuye el riesgo?. La intuición nos dice que el riesgo debe disminuir. Veamos qué dice el teorema de sensibilidad:

$$2x+5y+4z \geq 61 \Longrightarrow \underbrace{-2x-5y-4z}_{g_2(x,y,z)} \overset{\text{forma estándar}}{\leq} \underbrace{-61}_{b_2} \to -60 \Rightarrow \boxed{\Delta b_2 = -60-(-61) = 1}$$

$$\boxed{\Delta R = \lambda_2 \cdot \Delta b_2 = -6 \cdot 1 = -6 < 0} \Rightarrow \text{el riesgo disminuye}$$

- ¿Sería más o menos arriesgado con un presupuesto de 21 u.m.?

$$\underbrace{x+y+z}_{g_1(x,y,z)} \leq \underbrace{20}_{b_1} \to 21, \quad \Delta b_1 = 21-20 = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta R = \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot 1 = 0}$$

El riesgo no cambia ya que el presupuesto no está saturado en el óptimo.

¿Cual es la inversión más arriesgada?

En este caso tendríamos que cambiar a un problema de maximización. Está claro que lo más arriesgado debe ser invertir todo el presupuesto: $x+y+z=20$. Veamos diferentes casos: $\lambda_1 \neq 0$

1) $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x+y+z=20 \Rightarrow x=20-y-z$

$$R(x,y,z)=(20-y-z)^2+3y^2+2z^2=h(y,z)$$ problema sin restricciones

$$\frac{\partial h}{\partial y}=0=\frac{\partial h}{\partial z} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{120}{11},\frac{40}{11},\frac{60}{11}\right),\ R\left(\frac{120}{11},\frac{40}{11},\frac{60}{11}\right)=\frac{2400}{11} \simeq 218'182,\ \lambda_1=\frac{240}{11}$$

compatible con máximo.

2) $\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5=0$, $\lambda_1,\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ 2x+5y+4z=61 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-19+2x \\ z=39-3x \end{array}$

$$R(x,y,z)=x^2+3(2x-19)^2+2(39-3x)^2=h(x)$$

$$\frac{dh(x)}{dx}=-696+62x=0 \Rightarrow x=\frac{348}{31},\ y=-19+2x=\frac{107}{31},\ z=39-3x=\frac{165}{31}$$

$R=\frac{6771}{31} \simeq 218'419$, $\lambda_1=\frac{732}{31}$, $\lambda_2=\frac{18}{31}$ compatible con máximo.

Antes de seguir probando casos y casos... podemos pararnos y "pensar un poco". El activo con más riesgo es el B, con lo cual parece claro que invertir todo el presupuesto al activo B debe ser la opción más arriesgada. Es decir, el máximo riesgo debe darse para $(x,y,z)=(0,20,0)$, con un rendimiento esperado de $5 \cdot 20 = 100 > 61$ u.m.

Esta opción no saturará las siguientes restricciones:

$$y \geq 0 \Rightarrow \underset{\text{holgura c.}}{\lambda_4 = 0}, \quad 2x+3y+4z \geq 61 \Rightarrow \underset{\text{holgura c.}}{\lambda_2 = 0}.$$

Sustituyendo en las condiciones de tangencia:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \cancel{2x} - \lambda_1 + 2\cancel{\lambda_2} + \lambda_3 = -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 6\overset{20}{y} - \lambda_1 + 5\cancel{\lambda_2} + \cancel{\lambda_4} = 120 - \lambda_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= \cancel{4z} - \lambda_1 + 4\cancel{\lambda_2} + \lambda_5 = -\lambda_1 + \lambda_5 = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_3 &= 120 \\ \lambda_1 &= 120 \\ \lambda_5 &= 120 \end{aligned}$$

Compatible con máximo

Vemos pues que $(x,y,z)=(0,20,0)$ verifica las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo local. De hecho, el riesgo es

$R(0,20,0) = 3(20)^2 = 1200$, mayor que en los casos anteriores.

Se puede ver que éste es efectivamente el máximo global, es decir, la "inversión más arriesgada".

Os propongo otro problema similar, pero ahora con sólo dos activos A y B con rendimientos unitarios esperados 2 y 3, un presupuesto total de 2 u.m., un rendimiento total esperado de al menos 3 u.m. y un riesgo de $R(x,y) = x^2 + y^2$ (los dos activos son igual de "arriesgados"). Se pide:

a) Hallar el mínimo y el máximo global con ayuda del método gráfico

b) Verificar que dichos puntos verifican las condiciones de Kuhn-Tucker

c) ¿Cómo varía el riesgo en el mínimo si el rendimiento total esperado pasa de 3 a 3'1?

d) ¿Cómo varía el riesgo en el mínimo si el presupuesto total pasa de 2 a 1'9?

e) ¿Cómo varía el riesgo en el máximo si el rendimiento total esperado pasa de 3 a 2'9?

f) ¿Cómo varía el riesgo en el máximo si el presupuesto total pasa de 2 a 2'1?

Ejercicio Optimizar $f(x) = 3x - x^3$

s.a. $0 \leq x \leq 2$ $\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow g_1(x) = -x \leq 0 \\ x \leq 2 \Rightarrow g_2(x) = x - 2 \leq 0 \end{cases}$

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x) = 3x - x^3 - \lambda_1(-x) - \lambda_2(x-2)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker.

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 - 3x^2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

2) Holgura Complementaria: $\lambda_1 g_1(x) = 0$, $\lambda_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda_1 x = 0}$, $\underline{\lambda_2 (x-2) = 0}$

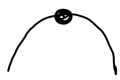
3) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (máximo) ó $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ (mínimo)

Casos:

a) $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 \Rightarrow 0 < x < 3$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 - 3x^2 + \cancel{\lambda_1} - \cancel{\lambda_2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad f(1) = 2$$

$f''(x) = -6x < 0$ si $0 < x < 2 \Rightarrow f$ es Cóncava



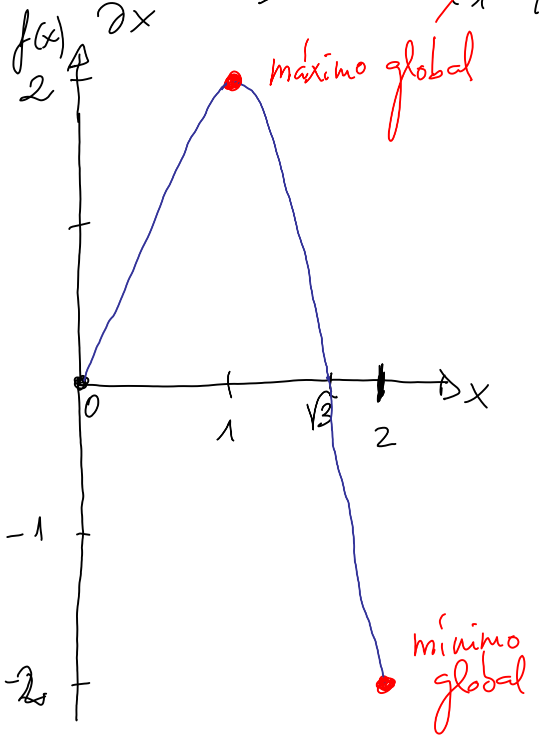
x = 1 es un máximo local y global

b) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad f(0) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 - \cancel{3x^2} + \lambda_1 - \cancel{\lambda_2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 < 0 \Rightarrow$$ Candidato a mínimo.

c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ $x = 2$ $\quad f(2) = -2$ $\quad$ Mínimo global

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 - 3x^2 + \cancel{\lambda_1} - \lambda_2 = 3 - 12 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -9 < 0$$



$$f(x) = 3x - x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \sqrt{3}$$

¿Cuál es aprox. $\Delta f(2)$ si la restricción $x \leq 2$ pasa a $x \leq 2'1$?

$$\Delta f(2) \simeq \lambda_2 \Delta b_2 = -9 \cdot 0'1 = -0'9$$

Compárese con el incremento exacto $\Delta f = f(2'1) - f(2) = 3 \cdot 2'1 - 2'1^3 - (-2) = -0'961$

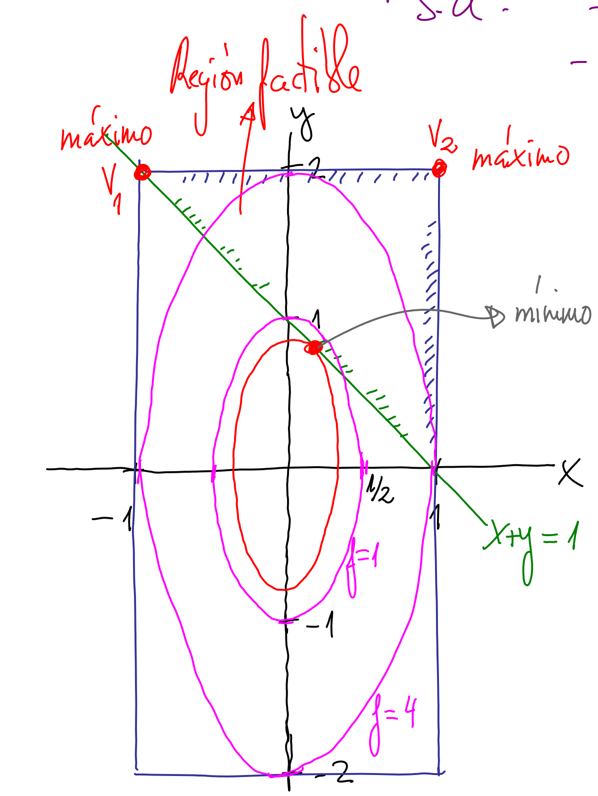
Ejercicio

Optimizar $4x^2+y^2$

s.a. $-1 \leq x \leq 1$

$-2 \leq y \leq 2$

$x+y \geq 1$



Curvas de nivel:

$$4x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(1)^2}=1$$

$$4x^2+y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{(1)^2}+\frac{y^2}{(2)^2}=1$$

En el mínimo sólo se satura la restricción $x+y \geq 1 \Rightarrow$

$1-x-y \leq 0$

$$L(x,y,\lambda) = 4x^2+y^2-\lambda(1-x-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 8x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y+\lambda=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \lambda=-8x$, $\Rightarrow \lambda=-2y$ $\Big\}$ $8x=2y \Rightarrow y=4x$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=1/5$$

$y=4/5$

$\lambda=-8/5<0$

mínimo.

El máximo se ve gráficamente que está en los vértices $V_1=(-1,2)$, $V_2=(1,2)$ y vale $f(-1,2)=f(1,2)=8$

¿Es $V_1=(-1,2)$ un punto singular?

Las restricciones que se saturan en $(-1,2)$ son:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 1 \\ y\leq 2 \\ x\geq -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow g_1(x,y)=1-x-y\leq 0 \,, \quad \vec{\nabla} g_1(-1,2)=(-1,-1) \\ \Rightarrow g_2(x,y)=y-2\leq 0 \,, \quad \vec{\nabla} g_2(-1,2)=(0,1) \\ \Rightarrow g_3(x,y)=-1-x\leq 0 \,, \quad \vec{\nabla} g_3(-1,2)=(-1,0) \end{array} \Bigg\} \text{linealmente dependientes}$$

$\Longrightarrow$ $V_1=(-1,2)$ es un punto singular

Nótese que la restricción $x\geq -1$ es redundante (sobra)