TEMA 3: PROGRAMACIÓN LINEAL

MANUEL CALIXTO

Un programa lineal es aquel en que la función objetivo $f(\vec{x})$ y las funciones $g_i(\vec{x})$ que definen las restricciones, son funciones lineales y las variables de decisión $\vec{x}$ son no negativas. La formulación general de estos programas consiste en:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar}: & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.a.} & \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right. \end{array}}$$

Forma Canónica

O en forma abreviada (matricial)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & \vec{c}^{\,t} \cdot \vec{x} \\ \text{s.a.} & A \cdot \vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{array}}$$

$\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$: Vector de "Costes"

$A = (a_{ij})_{m \times n}$: matriz de "Coeficientes tecnológicos"

$\vec{b}$: vector de "recursos"

Nótese que, en la forma canónica, todas las restricciones $A\cdot\vec{x} \leq \vec{b}$ se escriben en el mismo sentido "$\leq$". Nosotros pasaremos el programa lineal a la forma estándar:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Optimizar } \quad \vec{c}^{\,t}\cdot\vec{x} \\ \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} A\cdot\vec{x} = \vec{b} \\ \vec{x} \geq 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

introduciendo variables de holgura $s_1, s_2, \ldots, s_m \geq 0$ en cada desigualdad, con coste $c_i = 0$

Por ejemplo, $2x_1 + x_2 \leq 6 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + s_1 = 6, \quad s_1 \geq 0$

$x_1 - x_2 \geq 5 \longrightarrow x_1 - x_2 - s_2 = 5, \quad s_2 \geq 0$

$\left\{ \text{Nosotros partiremos siempre de un problema de Maximización con todos los recursos } b_i \geq 0. \right\}$

- Si el problema viene dado originalmente como: Minimizar $f(\vec{x})$, se trasforma a Maximizar $-f(\vec{x})$ (se cambia el signo)

- Si originalmente se tiene alguna restricción $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i < 0$ entonces se multiplica todo por (-1): $-a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i > 0$

Ejemplo 1

Minimizar $40x + 20y + 30z$

$$\text{S.a.} \begin{cases} 12x + 6y + 9z \geq 60 \\ 8x + 3y + 2z \leq 25 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$

Maximizar $-40x - 20y - 30z + 0S_1 + 0S_2$

$$\text{S.a.} \begin{cases} 12x + 6y + 9z - S_1 = 60 & = b_1 \\ 8x + 3y + 2z + S_2 = 25 & = b_2 \\ x, y, z, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Minimizar $2x - 3y$

S.a. $-2x + y \geq 4$

$-4x + 2y \leq -6 \rightarrow 4x - 2y \geq 6$ ($b_2 \geq 0$)

$x, y \geq 0$

$\longrightarrow$

Maximizar $-2x + 3y + 0S_1 + 0S_2$

S.a. $-2x + y - S_1 = 4$

$4x - 2y - S_2 = 6$

$x, y, S_1, S_2 \geq 0$

En aquellos casos en que la variable artificial S aparezca multiplicada por (-1), añadiremos a la correspondiente restricción una variable artificial "a" y la incorporaremos a la función objetivo con un coste $-M$, con $M > 0$ tan grande como sea necesario.

Ejemplo 1

Maximizar $-40x - 20y - 30z$

$$\text{S.a.} \begin{cases} 12x + 6y + 9z - S_1 = 60 \\ 8x + 3y + 2z + S_2 = 25 \\ x, y, z, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$

Maximizar $-40x - 20y - 30z - Ma$

S.a. $12x + 6y + 9z - S_1 + a = 60$

$8x + 3y + 2z + S_2 = 25$

$x, y, z, S_1, S_2, a \geq 0$

Ejemplo 2

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Maximizar } -2x+3y \\ \text{s.a. } -2x+y-S_1=4 \\ \qquad 4x-2y-S_2=6 \\ \qquad x,y,S_1,S_2 \geq 0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \overbrace{\text{Maximizar } -2x+3y-Ma_1-Ma_2}^{C_1x+C_2y+C_3a_1+C_4a_2}+0S_1+0S_2 \\ \text{s.a. } -2x+y-S_1+a_1=4 \quad =b_1 \\ \qquad 4x-2y-S_2+a_2=6 \quad =b_2 \\ \qquad x,y,S_1,S_2,a_1,a_2 \geq 0 \end{array}}$$

Ahora elegiremos como variables básicas (V.B.) aquellas que sólo aparecen en una restricción con coeficiente (+1).

- En el ejemplo 1, son básicas: a, S_2
- En el ejemplo 2, son básicas: a_1, a_2

Una vez realizados estos arreglos, escribimos la tabla del Simplex

Ejemplo 2:

V.B	$\vec{C}_j$	x	y	S_1	S_2	a_1	a_2	$\vec{b}$
		-2	3	0	0	$-M$	$-M$	
a_1	$-M$	$a_{11}=-2$	1	-1	0	1	0	4
a_2	$-M$	$a_{21}=4$	-2	0	-1	0	1	6
$\tilde{C}_K=C_K-Z_K$		$\underbrace{-2-2M+4M}_{-2+2M}$	$\underbrace{3+M-2M}_{3-M}$	$\underbrace{0-M}_{-M}$	$\underbrace{0-M}_{-M}$	$\underbrace{-M+M}_{0}$	$\underbrace{-M+M}_{0}$	$-10M$ función objetivo

$\tilde{C}_K$: "indicadores" "precios venta reducidos", con $Z_K=a_{1K}C_{B_1}+a_{2K}C_{B_2}$, C_{B_1}, C_{B_2}: costes de las variables básicas

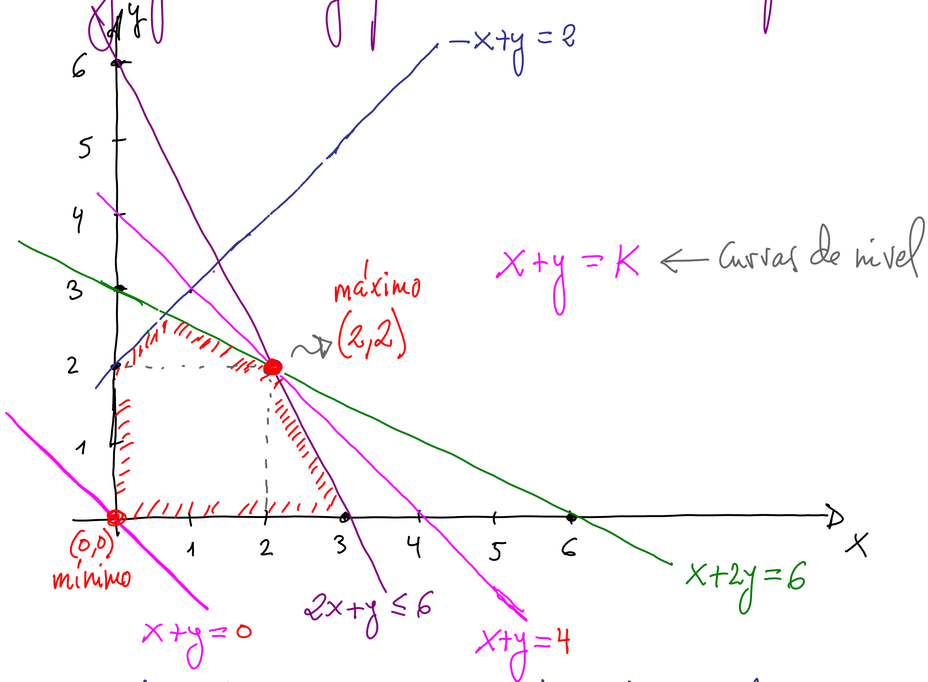
Por ejemplo, para $K=2$ ($x_2=y$) tenemos que:

$C_2=3$, $a_{12}=1$, $a_{22}=-2$, $C_{B_1}=C_5=-M$, $C_{B_2}=C_6=-M \Rightarrow$

$$\tilde{C}_2=C_2-Z_2=C_2-\left(a_{12}C_{B_1}+a_{22}C_{B_2}\right)=3-\left(1\cdot(-M)-2(-M)\right)=3+M-2M=3-M$$

Ejercicio 1a | Resolver gráficamente y por el método del simplex

$$\text{Maximizar } x+y$$
$$\text{s.a.}\begin{cases} -x+y \le 2 \\ x+2y \le 6 \\ 2x+y \le 6 \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$



Veamos cómo se resuelve el problema por el método del simplex.
Lo primero es poner el problema en la forma estándar, introduciendo variables de holgura S_i y (en caso de ser necesarias) variables artificiales.

$$\text{Maximizar } x+y+0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3$$
$$\text{s.a.}\begin{cases} -x+y+S_1 = 2 \\ x+2y+S_2 = 6 \\ 2x+y+S_3 = 6 \\ x,y,S_1,S_2,S_3 \ge 0 \end{cases}$$

No es necesario introducir variables artificiales, ya que todos los coeficientes de las variables de holgura S_i son $(+1)$ y todos los recursos b_i son positivos.
Las variables básicas son: S_1, S_2, S_3

V.B	$\vec{c}$	x	y	S_1	S_2	S_3	$\vec{b}$
		1	1	0	0	0	
S_1	0	−1	1	1	0	0	2
S_2	0	1	2	0	1	0	6
S_3	0	2	1	0	0	1	6
$\tilde{C}_K = C_K - Z_K$		$1-0$	$1-0$	$0-0$	$0-0$	$0-0$	$0\cdot2+0\cdot6+0\cdot6$

Solución factible básica: $x=y=0$, $S_1=2$, $S_2=6$, $S_3=6$, $f(x,y,S_1,S_2,S_3)=0$

El indicador $\tilde{c}_k = c_k - z_k$ se interpreta como que, por cada unidad que aumentemos x_k del vértice $(x,y) = (0,0)$, la función objetivo aumentará en $\tilde{c}_k$ unidades. Tenemos entonces que escoger la variable con un indicador mayor y convertirla en variable básica. En nuestro caso, los indicadores mayores son $\tilde{c}_1 = 1-0 = 1$ ó $\tilde{c}_2 = 1-0 = 1$. Podemos elegir cualquiera de las dos (x ó y) como nuevas variables básicas. Escojamos por ejemplo $x_1 = x$. En la columna correspondiente a esta variable $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nos fijamos sólo en los elementos positivos $\begin{pmatrix} \cancel{-1} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[Nota: en caso de que todos los elementos fuesen negativos o cero, se concluye que el conjunto factible no está acotado y el problema tiene solución NO ACOTADA (∞). Véase Ejercicio 16]

Calculamos los cocientes de $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ entre $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \cancel{-1} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (sólo para a_{ij} positivos) es decir: $\vec{b}/\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \cancel{2/-1} \\ 6/1 \\ 6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y nos fijamos en el más pequeño 3 el cual nos indica el pivote $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y la fila donde se encuentra la variable básica que dejará de serlo (en este caso s_3).

Una vez que sabemos que x pasa a ocupar el lugar de s_3 como nueva variable básica, debemos modificar la tabla para que x sólo aparezca en la restricción 3 y con coeficiente 1. Para ello, dividimos toda la fila 3 por el pivote 2

x	y	s_1	s_2	s_3	b	
-1	1	1	0	0	2	$\to F_1$
1	2	0	1	0	6	$\to F_2$
$2/2$	$1/2$	$0/2$	$0/2$	$1/2$	$6/2$	$\to F_3$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
1	$1/2$	0	0	$1/2$	3	$\to F_3$

y aplicamos Gauss por filas para hacer ceros en la 1ª columna:

$$\begin{array}{cccccccl}
0 & 3/2 & 1 & 0 & 1/2 & 5 & \leftarrow & F_1' = F_1 + F_3 \\
0 & 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 3 & \leftarrow & F_2' = F_2 - F_3 \\
1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 3 & \leftarrow & F_3' = F_3
\end{array}$$

Con esta nueva matriz de coeficientes volvemos a escribir la tabla del simplex y a calcular de nuevo los costes reducidos.

V.B	$\vec{C}$	x 1	y 1	S_1 0	S_2 0	S_3 0	$\vec{b}$	$\vec{b}/\vec{a}_2$
S_1	0	0	3/2	1	0	1/2	5	$5/(\frac{3}{2}) = 10/3$
S_2	0	0	3/2 pivote	0	1	−1/2	3	$3/(\frac{3}{2}) = 6/3$ ← más pequeño
X	1	1	1/2	0	0	1/2	3	$3/(1/2) = 6$
$C_K - Z_K$		$1-1$	$\underbrace{1-1/2}_{1/2 \leftarrow \text{mayor}}$	$0-0$	$0-0$	$0-1/2$	$\frac{0.5+0.3+1.3}{3}$	

Hemos obtenido un nuevo vértice $y=0,\ S_3=0;\ S_1=5,\ S_2=3,\ X=3$. Aplicando el criterio, vemos que y pasa a ser básica y S_2 deja de serlo, con lo cual el pivote es $3/2$. Dividimos toda la fila 2 por $\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{cccccccl}
0 & 3/2 & 1 & 0 & 1/2 & 5 & \leftrightarrow & F_1 \\
0/(\frac{3}{2}) & 3/2/(\frac{3}{2}) & 0/(\frac{3}{2}) & 1/(\frac{3}{2}) & -1/2/(\frac{3}{2}) & 3/(\frac{3}{2}) & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 & \leftrightarrow & F_2 \\
1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 3 & \leftrightarrow & F_3
\end{array}$$

y aplicamos Gauss por filas para hacer ceros en la 2ª columna

$$\begin{array}{cccccccl}
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & \leftarrow & F_1' = F_1 - \frac{3}{2} F_2 \\
0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2 & \leftarrow & F_2' = F_2 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2 & \leftarrow & F_3' = F_3 - \frac{1}{2} F_2
\end{array}$$

Escribimos la nueva tabla del simplex y calculamos los indicadores

V.B	$\vec{C}$	x (1)	y (1)	S_1 (0)	S_2 (0)	S_3 (0)	$\vec{b}$
S_1	0	0	0	1	-1	1	2
y	1	0	1	0	$2/3$	$-1/3$	2
x	1	1	0	0	$-1/3$	$2/3$	2
$C_K - Z_K$		$\underbrace{1-1}_{0}$	$\underbrace{1-1}_{0}$	$\underbrace{0-0}_{0}$	$\underbrace{0-\frac{1}{3}}_{-1/3}$	$\underbrace{0-1/3}_{-1/3}$	$\underbrace{0\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 2}_{4}$

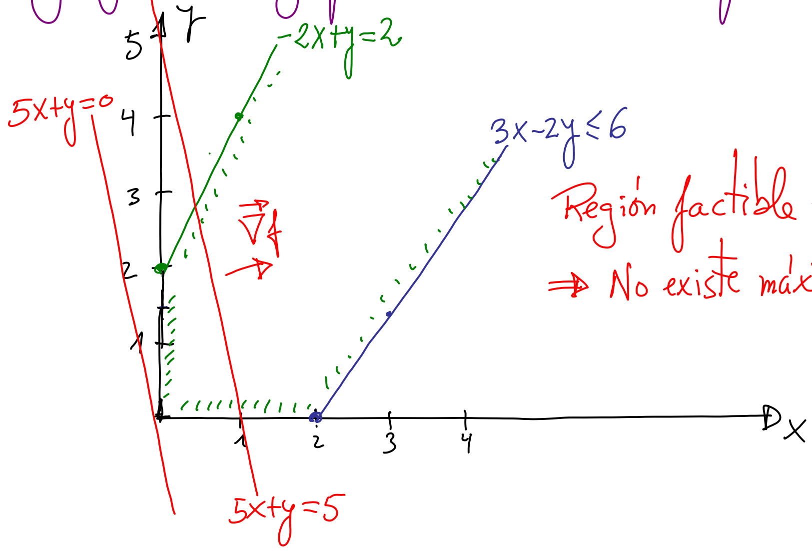
Hemos obtenido un nuevo vértice $(x,y)=(2,2)$, $S_1=2$, $\underset{\text{satura}}{S_2=0}$, $\underset{\text{satura}}{S_3=0}$
Con $f(2,2)=4$.

- Observamos que todos los costes reducidos o indicadores son ≤ 0. Hemos llegado pues a la tabla óptima.

- Observamos también que sólo son nulos los indicadores $\tilde{C}_x, \tilde{C}_y, \tilde{C}_{S_1}$ correspondientes a las variables básicas x, y, S_1. Esto quiere decir que la solución $(x,y)=(2,2)$ es única. En caso de que alguna variable no básica tuviese también indicador nulo, el problema presentaría infinitas soluciones (véase Ejercicio 2c más adelante).

Ejercicio 1b Resolver gráficamente y por el método del simplex:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar } 5x+y & \\ \text{s.a.} & 3x-2y\leq 6 \\ & -2x+y\leq 2 \\ & x,y\geq 0 \end{array}}$$



Región factible no acotada
$\Rightarrow$ No existe máximo (∞)

Introduzcamos variables de holgura

Maximizar $5x+y+0.S_1+0.S_2$

s.a. $\begin{cases} 3x-2y+S_1=6 \\ -2x+y+S_2=2 \\ x,y,S_1,S_2\geq 0 \end{cases}$

		5	1	0	0		
V.B.	$\vec{c}$	x	y	S_1	S_2	$\vec{b}$	$\vec{b}/\vec{a}_1$
S_1	0	3	−2	1	0	6	6/3 ← (Sale)
S_2	0	−2	1	0	1	2	
C_k-Z_k		5	1	0	0	$f=0$	

↑ máximo (entra)

Entra x en la base y sale S_1. El pivote es 3. Gauss:

$$\left|\begin{matrix} 3/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 6/3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \xrightarrow[F_2]{\frac{F_1}{3}} \left|\begin{matrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \xrightarrow[F_2\to F_2+2F_1]{F_1\to F_1} \left|\begin{matrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 6 \end{matrix}\right|$$

La nueva tabla es:

		5	1	0	0	
V.B	$\vec{c}$	x	y	S_1	S_2	$\vec{b}$
x	5	1	−2/3	1/3	0	2
S_2	0	0	−1/3	2/3	1	6
C_k-Z_k		0	$1+\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$f=10$

máximo

La columna de máximo indicador es $\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ que no tiene ningún elemento positivo.

Esto quiere decir que podemos incrementar sin límite el valor de "y" sin que ninguna variable básica (x,S_2) se anule y sin infringir ninguna restricción. Al poder incrementar sin límite el valor de "y", la función objetivo $f(x,y)=5x+y$ crecerá también indefinidamente, con lo cual, el problema es no acotado.

Ejercicio 1c| Resolver gráficamente y por el método del Simplex:

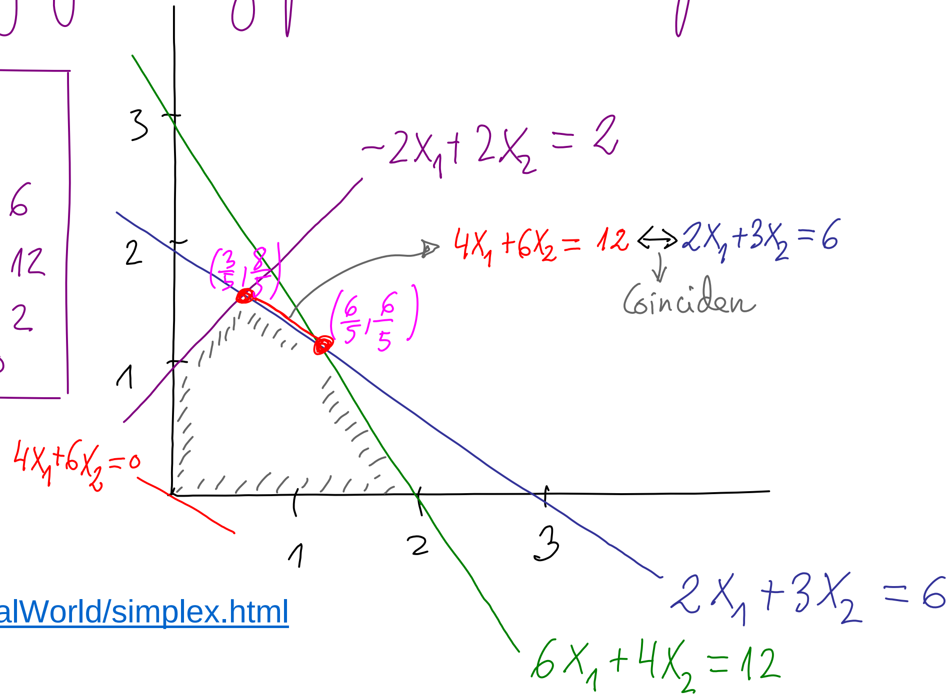
Maximizar $4x_1+6x_2$

s.a. $2x_1+3x_2 \le 6$

$6x_1+4x_2 \le 12$

$-2x_1+2x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$



http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html

Tabla #1

	x (4)	y (6)	s1 (0)	s2 (0)	s3 (0)	b
S_1	2	3	1	0	0	6/3
S_2	6	4	0	1	0	12/4
S_3	-2/2	2/2	0/2	0/2	1/2	2/2 Sale
C_k-Z_k	4	6 entra	0	0	0	0=f

$F_1 \rightarrow F_1 - 3F_3'$

$F_2 \rightarrow F_2 - 4F_3'$

$F_3 \rightarrow F_3' = -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1$

Tabla #2

	x	y	s1	s2	s3	b
S_1	5/5	0/5	1/5	0/5	-3/2/5	3/5 Sale
S_2	10	0	0	1	-2	8/10
y	-1	1	0	0	1/2	1
C_k-Z_k	10 entra	0	0	0	-3	6=f

$F_1 \rightarrow F_1' = 1 \quad 0 \quad 1/5 \quad 0 \quad -3/10 \quad 3/5$

$F_2 \rightarrow F_2 - 10F_1'$

$F_3 \rightarrow F_3 + F_1'$

Tabla #3 (óptima)

	x	y	s1	s2	s3	b
x	1	0	1/5	0	-3/10	3/5=x
S_2	0	0	-2	1	1	2/1 Sale
y	0	1	1/5	0	1/5	8/5=y · 5
C_k-Z_k	0	0	-2	0	0 entra	12=f

solución múltiple

$\Rightarrow$

	x	y	S_1	S_2	S_3	b
x	1	0	-2/5	3/10	0	6/5=x
S_3	0	0	-2	1	1	2
y	0	1	3/5	-1/5	0	6/5=y

12=f

Ejercicio 2a| Resolver por el simplex:

http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html

Maximizar $2x_1 + x_2 - x_3$

s.a. $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Tabla #1

	2	1	-1	0	0	
	x	y	z	s1	s2	b
S_1	1	1	0	1	0	1/1 sale
S_2	-1	2	1	0	1	2
$C_K - Z_K$	2 entra	1	-1	0	0	0

$F_2' = F_2 + F_1$

Tabla #2 (óptima)

	x	y	z	s1	s2	b
X	1	1	0	1	0	1=x
S_2	0	3	1	1	1	3
$C_K - Z_K$	0	-1	-1	-2	0	2 = f

x_1, x_2, x_3

$(x, y, z) = (1, 0, 0)$

$f(1, 0, 0) = 2$

máximo

Ejercicio 2b| Resolver por el simplex

Maximizar $7x + 10y + 4z$

s.a. $3x + 5y + 4z \leq 30$

$3x + 2y \leq 4$

$x + 2y \geq 8$

$x, y, z \geq 0$

Hay que introducir variable artificial "a"

Tabla #1

	7	10	4	0	0	0	-M	
	x	y	z	s1	s2	s3	a	b
S_1	3	5	4	1	0	0	0	30/5
S_2	3/2	2/2	0/2	0/2	1/2	0/2	0/2	4/2 sale
a	1	2	0	0	0	-1	1	8/2
$C_K - Z_K$	7+M	10+2M entra	4	0	0	0	-M	

$F_1 \to F_1' = F_1 - 5F_2'$

$F_2 \to F_2' = \frac{3}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 2$

$F_3 \to F_3' = F_3 - 2F_2'$

Tabla #2

	x	y	z	s1	s2	s3	a	b
S_1	-4.5/4	0/4	4/4	1/4	-2.5/4	0/4	0/4	20/4 sale
y	1.5	1	0	0	0.5	0	0	2
a	-2	0	0	0	-1	-1	1	4
$C_K - Z_K$	-8-2M	0	4 entra	0	-5-M	-M	0	20-4M

$F_1 \to F_1' = \frac{F_1}{4} = -\frac{9}{8} \quad 0 \quad 1 \quad 1/4 \quad -5/8 \quad 0 \quad 0 \quad 5$

$\left.\begin{array}{l} F_2 \to F_2 \\ F_3 \to F_3 \end{array}\right\}$ se quedan igual.

Tabla óptima:

	x	y	z	S_1	S_2	S_3	a	b
z	-9/8	0	1	1/4	-5/8	0	0	5 = z
y	3/2	1	0	0	1/2	0	0	2 = y
a	-2	0	0	0	-1	-1	1	4 = a
$C_K - Z_K$	$-\frac{7}{2} - 2M$	0	0	-1	$-\frac{5}{2} - M$	-M	0	

$f = 7 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - M \cdot 4 \xrightarrow[M \to \infty]{} -\infty$

Al estar la variable artificial "a" en la base de la tabla óptima, esto indica que el problema no tiene solución (región factible vacía).

Ejercicio 2c) Pag 438

Maximizar $60x_1 + 90x_3$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_3 + x_4 \leq 4$$
$$x_3 - 2x_4 \leq 7$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La solución es: $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 = 0$

El valor máximo es: $f(4,1,4,0) = 600$.

Los parámetros de Lagrange-Kuhn-Tucker son:

$$\alpha_1 = 20,\quad \alpha_2 = 40,\quad \alpha_3 = 90,\quad \alpha_4 = 0$$

no se satura $\rightarrow S_4 = 3$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ se obtienen de los indicadores de las variables de holgura S_1, S_2, S_3, S_4 en la tabla óptima, cambiados de signo.

Ejercicio 2d

Minimizar $x_1+x_2-x_3$

s.a. $x_1-2x_2+x_3 \le 1$

$2x_1+x_2+x_3 \le 1$

$x_1+x_2-2x_3 \le 1$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\Leftrightarrow$

Maximizar $-x-y+z$

s.a. $x-2y+z+S_1=1$

$2x+y+z+S_2=1$

$x+y-2z+S_3=1$

$x, y, z, S_1, S_2, S_3 \ge 0$

Tableau #1

	x	y	z	s1	s2	s3	b
S_1	1	-2	1	1	0	0	1/1
S_2	2	1	1	0	1	0	1/1 sale
S_3	1	1	-2	0	0	1	1
C_K-Z_K	-1	-1	1	0	0	0	0 = f
			entra				

$F_1 \to F_1 - F_2$

$F_2 \to F_2$

$F_3 \to F_3 + 2F_2$

Tableau #2 $\to$ óptima

	x	y	z	s1	s2	s3	b
S_1	-1	-3	0	1	-1	0	0
z	2	1	1	0	1	0	1
S_3	5	3	0	0	2	1	3
C_K-Z_K	-3	-2	0	0	-1	0	1 = f

Optimal Solution: f = 1; x = 0, y = 0, z = 1

Ejercicio 2e

pag. 425

Minimizar $-3x-4y+z$

s.a. $x+y+z \ge 4$

$x+y \le 5+2z$

$x+2y+3z \le 9$

$x, y, z \ge 0$

Solución: $x=1,\ y=4,\ z=0,\ S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=0,\ a=0$

$$\text{Min}\{-3x-4y+z\} = -19$$

Ejercicio 2f)

Minimizar $5x+3y+z$

s.a. $x+z \leq 100$

$x+2z \geq 200-y \iff$

$x-z \geq 0 \quad -x+z \leq 0$

$x,y,z \geq 0$

Maximizar $-5x-3y-z$

s.a. $x+z+S_1 = 100$

$x+y+2z-S_2 = 200$

$-x+z+S_3 = 0$

$x,y,z,S_1,S_2,S_3 \geq 0$

y es básica (no hace falta meter variable artificial)

		-5	-3	-1	0	0	0	
		x	y	z	S_1	S_2	S_3	b
S_1	0	1	0	1	1	0	0	100/1
y	-3	1	1	2	0	-1	0	200/2
S_3	0	-1	0	1	0	0	1	0/1 sale
C_k-Z_k		-2	0	5	0	-3	0	$f=-600$
				entra				

$F_1 \rightarrow F_1 - F_3$

$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3$

$F_3 \rightarrow F_3$

		-5	-3	-1	0	0	0	
		x	y	z	S_1	S_2	S_3	b
S_1	0	2	0	0	1	0	-1	100/2 sale
y	-3	3	1	0	0	-1	-2	200/3
z	-1	-1	0	1	0	0	1	0
C_k-Z_k		3	0	0	0	-3	-5	$f=-600$
		entra						

$F_1 \rightarrow F_1' = F_1/2$

$F_2 \rightarrow F_2' = F_2 - 3F_1'$

$F_3 \rightarrow F_3' = F_3 + F_1'$

		-5	-3	-1	0	0	0	
		x	y	z	S_1	S_2	S_3	b
x	-5	1	0	0	1/2	0	-1/2	$50 = x$
y	-3	0	1	0	-3/2	-1	-1/2	$50 = y$
z	-1	0	0	1	1/2	0	1/2	$50 = z$
C_k-Z_k		0	0	0	-3/2	-3	-7/2	$f=-450$
					$= -\lambda_1$	$= -\lambda_2$	$= -\lambda_3$	

$\leftarrow$ Tabla óptima.

$\leftarrow$ parámetros de Lagrange-Kuhn-Tucker. ó "precios sombra"

Ejercicio 3

Tabla 1 $\rightarrow$ c), Tabla 2 $\rightarrow$ b) (Solución no acotada), Tabla 3 $\rightarrow$ a) (Solución múltiple)

Ejercicio 5

Pag. 433

$$\text{Maximizar } 0'14x + 0'10y + 0'12z$$

s.a.

$$x \leq \frac{300}{4} = 125$$

$$x+y \leq 500 \cdot \frac{45}{100} = 225$$

$$\frac{80}{100}(x+y) \leq z \leq 500 \cdot \frac{70}{100} = 350$$

$$x+y+z = 500$$

$$x, y, z \geq 0$$

Despejando $z = 500 - y - x$ de reducimos el problema a 2 variables

$$\text{Maximizar } 0'14x + 0'10y + 0'12(500-y-x) \Leftrightarrow \text{Maximizar } x - y$$

$$\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{c} x \leq 125 \\ x+y \leq 225 \\ 150 \leq x+y \leq 500 \\ 9x+9y \leq 2500 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \leq 125 \\ x+y \leq 225 \\ 150 \leq x+y \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Este problema puede resolverse por el método gráfico, obteniendo:

Vértice óptimo $(x, y, z) = (125, 25, 350)$ miles de u.m.

Rendimiento máximo: $0'14(125) + 0'10 \cdot (25) + 0'12(350) = 62$ miles de u.m.

Ejercicio 6

pag 386

Minimizar $40x + 20y + 30z$

s.a. $12x + 6y + 9z \geq 60$

$8x + 3y + 2z \leq 25$

$x, y, z \geq 0$

Solución múltiple: Cara definida por los vértices:

$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{35}{16}, 0, \frac{15}{4}\right)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0, 7, 2)$, $(x_3, y_3, z_3) = \left(0, 0, \frac{20}{3}\right)$

Es decir: $(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta}) = (1-\alpha-\beta)\left(\frac{35}{16}, 0, \frac{15}{4}\right) + \alpha(0, 7, 2) + \beta\left(0, 0, \frac{20}{3}\right)$

Con $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ parámetros.

Valor mínimo de la función objetivo: $f(x_0, y_0, z_0) = 200$ u.m.

Ejercicio 7

pag 391.

Minimizar $4x + 6y + 3z$

s.a. $3x + 2y + 5z \leq 1000$

$5x + 20y + 10z \leq 800$

$x + y + z \geq 100$

$x, y, z \geq 0$

Vértice óptimo: $(x, y, z) = (40, 0, 60)$, $f(40, 0, 60) = 340$ u.m.

Parámetros de Lagrange-Kuhn-Tucker: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = 5$

no se satura $\rightarrow S_1 = 580$

Ejercicio 9

pag 393

x: bonos

y: riesgo medio

z: obl. especulat.

Maximizar $0'05x + 0'08y + 0'16z$

s.a.

$$x+y+z \leq 50000$$
$$y+z \leq 35000$$
$$x+z \leq 30000$$
$$x,y,z \geq 0$$

Vértice óptimo : $(x_0,y_0,z_0)=(0,\ 5000,\ 30000)$, $f(x_0,y_0,z_0)=5200$ €

parámetros de Lagrange-Kuhn-Tucker: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=8$, $\lambda_3=8$

no se satura. → $S_1=15000$

Ejercicio 10

pag 395

x: vacunas a París

y: " a Roma

z: " a Londres

(en miles)

Minimizar $100000x + 200000y + 500000z + 1950000$

s.a.

$$x+y+z = 1300$$
$$x \geq 900$$
$$y \geq 70$$
$$z \geq 80$$
$$x,y,z \geq 0$$

Se puede reducir a un programa de sólo dos variables.

Vértice óptimo : $(x,y,z)=(1150,\ 70,\ 80)$ miles de vacunas.

Coste del transporte: 170950000 €

Ejercicio 14

pag. 383

x: lanchas

y: veleros carrera

z: veleros paseo

Maximizar $5x+4y+6z$

s.a.

$$x+y+z \leq 25$$
$$2x+y+3z \leq 51$$
$$x,y,z \geq 0$$

Solución múltiple: arista de vértices:

$$(x_1,y_1,z_1)=(0,12,13) \quad , \quad (x_2,y_2,z_2)=(24,0,1)$$

es decir: $(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)=(1-\alpha)(0,12,13)+\alpha(24,0,1) \quad , \quad 0\leq\alpha\leq 1$

Beneficios máximos: 126000 €

Ej 11: Maximizar f=20x-2y+4z
sujeto a: 2x+4y+8z<=32, 2x+2y<=16, y-x-2z>=6

Tabla #1

x	y	z	s1	s2	s3	a	b
2	4	8	1	0	0	0	32=s1
2	2	0	0	1	0	0	16=s2
-1	1	-2	0	0	-1	1	6=a
20-M	-2+M	4	0	-M	0	0	-6M

...hacer los pasos intermedios...

Tabla óptima

x	y	z	s1	s2	s3	a	b
0	0	10	1	-3/2	1	?	2=s1
1	0	1	0	1/4	1/2	?	1=x
0	1	-1	0	1/4	-1/2	?	7=y
0	0	-18	0	-9/2	-11	?	6

Solución óptima: f = 6; x = 1, y = 7, z = 0

Ej 12: Maximizar f=3x+4y-z
sujeto a: x+y+z>=4, x+y-2z<=5,x+2y+5z<=9

Tableau #1

x	y	z	s1	s2	s3	a	b
1	1	1	-1	0	0	1	4=a
1	1	-2	0	1	0	0	5=s2
1	2	5	0	0	1	0	9=s3
3+M	4+M	-1+M	-M	0	0	0	-9M

... hacer los pasos intermedios...

Tabla óptima:

x	y	z	s1	s2	s3	a	b
1	0	-9	0	2	-1	?	1=x
0	0	-3	1	1	0	?	1=s1
0	1	7	0	-1	1	?	4=y
0	0	-2	0	-2	-1	?	19

Solución óptima: f = 19; x = 1, y = 4, z = 0

Ej 15: Maximize f=2x+3y+5z
subject to x+2y+z<=20, 2y+z<=12,
x+2y+2z<=35

Tableau #1

x	y	z	s1	s2	s3	b
1	2	1	1	0	0	20
0	2	1	0	1	0	12
1	2	2	0	0	1	35
2	3	5	0	0	0	0

Tableau #2

x	y	z	s1	s2	s3	b
1	0	0	1	-1	0	8
0	2	1	0	1	0	12
1	-2	0	0	-2	1	11
2	-7	0	0	-5	0	60

Tableau #3

x	y	z	s1	s2	s3	b
1	0	0	1	-1	0	8=x
0	2	1	0	1	0	12=z
0	-2	0	-1	-1	1	3=s3
0	-7	0	-2	-3	0	76

Optimal Solution: f = 76; x = 8, y = 0, z = 12

Ej 13: Maximize f=3x+4y+2z
subject to 2x+2y+z<=8, 4x+y+2z<=6,
x+4y+6z<=20

Tableau #1

x	y	z	s1	s2	s3	b
2	2	1	1	0	0	8
4	1	2	0	1	0	6
1	4	6	0	0	1	20
3	4	2	0	0	0	0

Tableau #2

x	y	z	s1	s2	s3	b
1	1	1/2	1/2	0	0	4
3	0	3/2	-1/2	1	0	2
-3	0	4	-2	0	1	4
-1	0	0	-2	0	0	16

Optimal Solution: f = 16; x = 0, y = 4, z = 0

$s_1 = 0 \Rightarrow$ no sobra oro

$s_2 = 0 \Rightarrow$ no sobra plata

$s_3 = 3 \Rightarrow$ sobran 3 horas de acabado.

a) Comprueba si $(0,6,0)$ y $(6,3,1)$ son vértices del conjunto factible

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+2y+z \leq 20 \\ (2) & 2y+z \leq 12 \\ (3) & x+2y+2z \leq 35 \\ & x, y, z \geq 0 \\ & (4)\ (5)\ (6)\end{array}\right\} \text{Seis restricciones}$$

En principio habrá $\frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} = 20$ vértices, es decir, combinaciones de 6 restricciones tomadas de 3 en 3, aunque no todos ellos pertenecerán a la región factible.

a.1) $(x,y,z)=(0,6,0)$ satura $\left.\begin{cases} x=0 & (4) \\ z=0 & (6) \\ 2y+z=12 & (2)\end{cases}\right\} \Rightarrow$ es vértice

Además, $(0,6,0)$ pertenece al conjunto factible ya que $\begin{cases} x+2y+z=12 \leq 20 & (1) \\ x+2y+2z=12 \leq 35 & (3) \\ y=6 \geq 0 & (5)\end{cases}$

a.2) $(x,y,z) = (6,3,1)$ no satura ninguna restricción $\Rightarrow$ no es vértice.

Ejercicio 8 | x, y, z : Cantidades a invertir en Eléctricas, Bancos y Servicios

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maxim. } f(x,y,z) = 0'04x + 0'05y + 0'09z & \\ \text{s.a.} \quad x+y+z = 200 & \\ \quad x \leq 100 & \\ \quad y \geq 70 & \\ \quad z \leq 40 & \end{array}}$$

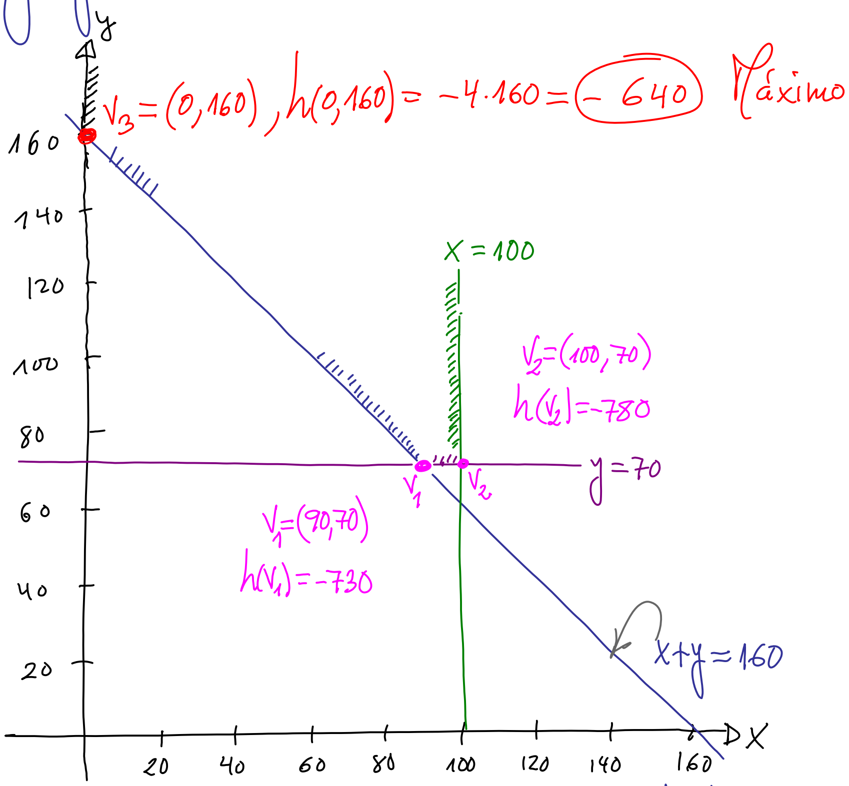
despejo: $z = 200 - x - y$ $\longleftrightarrow$ reduzco a dos variables x, y

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max. } 0'04x + 0'05y + 0'09(200-x-y) \\ \text{s.a.} \quad x \leq 100 \\ \quad y \geq 70 \\ \quad 200 - x - y \leq 40 \end{array}}$$

El problema es equivalente a: $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max. } h(x,y) = -5x - 4y \\ \text{s.a.} \quad x \leq 100 \\ \quad y \geq 70 \\ \quad x+y \geq 160 \end{array}}$$

Método gráfico:



La solución que produce mayor rentabilidad es:

$x = 0$, $y = 160$, $z = 40$ Rentabilidad: $f(0,160,40) = 11'6$ millones.