Modelos no lineales
Aplicaciones en ordenador

Román Salmerón Gómez

Modelos linealizables

Dada la ecuación de Cobb-Douglas:

$$P_t = \beta_1 T_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} e^{u_t}, \tag{1}$$

donde P es la producción total, T es el trabajo, y K es el capital. En este modelo β_1 se interpreta como el factor total de productividad y, como veremos a continuación, β_2 y β_3 las elasticidades del trabajo y capital, respectivamente.

Se pide:

a) Ajustar un modelo de producción agropecuario para México a partir de la información obtenida en [1] (página 46) para los años 1980-2007 donde P es la producción agropecuaria (medida en toneladas), T es el número de empleados (medido como el promedio de personal ocupado remunerado) y K es el PIB agropecuario (medido en miles de pesos con año base 1993).

b) Contrastar la hipótesis de homogeneidad del modelo.

Aunque el modelo (1) es no lineal es fácilmente linealizable sin más que considerar logaritmos neperianos. En tal caso se obtiene el modelo

$$P_t^* = \beta_1^* + \beta_2 T_t^* + \beta_3 K_t^* + u_t, \tag{2}$$

donde $\beta_1^* = \ln \beta_1$, $P_t^* = \ln P_t$, $T_t^* = \ln T_t$ y $K_t^* = \ln K_t$. La estimación de este modelo mediante Gretl es:

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1980–2007 ($T = 28$)
Variable dependiente: l_P

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
const	−10.3859	3.32728	−3.1214	0.0045
l_K	1.17094	0.0846680	13.8298	0.0000
l_T	0.435760	0.254356	1.7132	0.0991

Media de la vble. dep.	17.65047	D.T. de la vble. dep.	0.151843
Suma de cuad. residuos	0.043320	D.T. de la regresión	0.041627
R^2	0.930412	R^2 corregido	0.924844
$F(2, 25)$	167.1274	Valor p (de F)	3.40e–15
Log-verosimilitud	50.86840	Criterio de Akaike	−95.73680
Criterio de Schwarz	−91.74019	Hannan–Quinn	−94.51500
$\hat{\rho}$	0.212928	Durbin–Watson	1.496929

Se puede observar que β_1^* y β_2 son significativamente distintos de cero, el modelo es significativo en su conjunto (todos los contrastes al nivel de significación del 5 %) y se obtiene un coeficiente de determinación de $0'9304$. Además, sería interesante analizar si el modelo presenta algún problema con respecto a sus hipótesis básicas, como por ejemplo, autocorrelación (adviértase que estamos trabajando con una serie temporal). En tal caso, la estimación del modelo (1) corresponde a:

$$\widehat{P}_t = e^{-10'3859} T_t^{0'4357} K_t^{1'17094} = 0'00003086 T_t^{0'4357} K_t^{1'17094}.$$

Finalmente, a partir de la expresión (2) queda claro que los parámetros β_2 y β_3 se interpretan como las elasticidades del trabajo y capital, respectivamente. Es más, a partir de la estimación obtenida, un incremento del 1 % en la cantidad de capital provoca un incremento aproximado del 1'17 % en la producción (el coeficiente correspondiente al trabajo no se interpreta ya que no sale significativo).

Por otro lado, el modelo se dice homogéneo de grado 1 si se verifica que $\beta_2 + \beta_3 = 1$. Para contrastar esta hipótesis lineal sobre los coeficientes del modelo (2) usaremos la opción *Restricciones lineales* que se encuentra en el menú *Contrastes* de la ventana de Gretl donde se ha obtenido la estimación del modelo. Especificando dicha restricción en la forma `b[2]+b[3]=1` en la pantalla que nos sale, se tiene que se rechaza dicha hipótesis al nivel de significación del 5 %. Por tanto, se rechaza que el modelo sea homogéneo.

> Como ayuda se recomienda visualizar el siguiente enlace http://bit.ly/1hqJfqY correspondiente al Proyecto de Innovación Docente **Guía multimedia para la elaboración de un modelo econométrico (GUIME)** coordinado por el profesor Jorge Chica Olmo.

Modelos no linealizables

Consideremos a continuación que en el modelo (1) la perturbación aleatoria aparece sumando, es decir:

$$P_t = \beta_1 T_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} + u_t. \tag{3}$$

Entonces, este nuevo modelo no es linealizable y, en tal caso, habrá que aplicar otros métodos de estimación.

Seleccionando *Mínimos cuadrados no lineales* del menú *Modelo* del menú principal de Gretl nos aparecerá una nueva ventana donde hay que especificar el modelo no lineal a estimar:

```
genr a = -10
genr b = 0.4
genr c = 1
P = a*T^{b}*K^{c}
deriv a = T^{b}*K^{c}
deriv b = a*T^{b}*K^{c}*ln(T)
deriv c = a*T^{b}*K^{c}*ln(K)
```

En las tres primeras líneas se ha especificado los valores iniciales de los parámetros a estimar (adviértase que $a = \beta_1$, $b = \beta_2$ y $c = \beta_3$), en la cuarta línea la expresión de la función no lineal y en las tres últimas las derivadas partiales con respecto a cada uno de los parámetros desconocidos.

Seleccionando que muestre los detalles de las iteraciones se obtiene el siguiente ajuste:

Modelo 2: MC. no lineales, usando las observaciones 1980–2007 ($T = 28$)
`P = a*T^{b}*K^{c}`

	Estimación	Desv. Típica	Estadístico t	Valor p
a	2.23917e–005	7.10796e–005	0.3150	0.7554
b	0.460556	0.227102	2.0280	0.0533
c	1.16731	0.0725566	16.0883	0.0000

Media de la vble. dep.	46812476	D.T. de la vble. dep.	7192993
Suma de cuad. residuos	8.91e+13	D.T. de la regresión	1888166
R^2	0.936198	R^2 corregido	0.931093
Log-verosimilitud	−442.7749	Criterio de Akaike	891.5499
Criterio de Schwarz	895.5465	Hannan–Quinn	892.7717
$\hat{\rho}$	0.131959	Durbin–Watson	1.640095

Tras 162 iteraciones se llega a la convergencia en el algoritmo considerando una tolerancia de $1{,}81899e-012$. Nótese que el procedimiento ha minimizado la suma de cuadrados de los residuos, por tanto, se ha usado el algoritmo de Newton-Raphson. La estimación obtenida corresponde a:

$$\widehat{P}_t = 0'00002239 T_t^{0'4605} K_t^{1'16731}.$$

Como se puede observar, dicha estimación es muy parecida a la obtenida para el modelo (1).

Finalmente, destacar que como condiciones inicales de los parámetros se han considerado las estimaciones obtenidas para el modelo (2). En tal caso, las condiciones inicales de las elasticidades son bastante buenas al contrario que la dada para el factor total de productividad, de ahí que realice 162 iteraciones hasta obtener convergencia. Se recomienda al lector repetir cálculos modificando el valor de dichas condiciones iniciales.

Como ayuda se recomienda visualizar el siguiente enlace http://bit.ly/1haPGdd correspondiente al Proyecto de Innovación Docente **Guía multimedia para la elaboración de un modelo econométrico (GUIME)** coordinado por el profesor Jorge Chica Olmo.

Referencias

[1] Olva Maldonado, H. (2009). *Análisis de la función de producción Cobb-Douglas y su aplicación en el sector productivo Mexicano*. Tesis profesional. Universidad Autónoma de Chapingo, México.
Dirección web: http://bit.ly/1pFtQnn.

[2] Wikipedia: Función de producción de Cobb-Douglas. Dirección web: http://bit.ly/1gfKeFP.