Modelos de ecuaciones simultáneas

Román Salmerón Gómez

Grado en Economía

Introducción

Consideremos el siguiente modelo económico multiecuacional:

$$\text{Modelo 1: } P = f(V, HD, S), \quad V = f(P, RAM),$$

donde, en primer lugar, se pretende explicar el precio de un ordenador portátil, P, a partir de su velocidad, V, el tamaño del disco duro, HD, y el tamaño de la pantalla, S; y, en segundo lugar, la velocidad del portátil a partir de su precio y tamaño de la memoria RAM, RAM.
Especificando que la relación es lineal, aleatoria y que no hay término constante, se tiene el siguiente modelo econométrico multiecuacional:

$$P_i = \alpha_1 \cdot V_i + \alpha_2 \cdot HD_i + \alpha_3 \cdot S_i + u_{1i}, \quad (1)$$

$$V_i = \beta_1 \cdot P_i + \beta_2 \cdot RAM_i + u_{2i}. \quad (2)$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene:

$$P_i = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot HD_i + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot S_i + \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{1-\alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot RAM_i + \frac{\alpha_1 \cdot u_{2i} + u_{1i}}{1-\alpha_1 \cdot \beta_1}, \quad (3)$$

mientras que sustituyendo la primera en la segunda:

$$\begin{aligned} V_i \quad = \quad & \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{1 - \alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot HD_i + \frac{\beta_1 \cdot \alpha_3}{1 - \alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot S_i + \frac{\beta_2}{1 - \alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot RAM_i \\ & + \frac{\beta_1 \cdot u_{1i} + u_{2i}}{1 - \alpha_1 \cdot \beta_1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Adviértase que se ha de verificar que $\alpha_1 \cdot \beta_1 \neq 1$.
En ambos casos se obtiene que P_i y V_i dependen tanto de u_{1i} como de u_{2i}, lo cual implica que si se estima de forma individual los modelos (1) y (2) por mínimos cuadrados ordinarios se estaría incumpliendo el principio de exogeneidad ya que a) en la ecuación (1) se tiene que V_i está relacionado con u_{1i} y b) en la ecuación (2) se tiene que P_i está relacionado con u_{2i}.
Si la estimación de dichas ecuaciones por MCO no es adecuada, ¿cómo se podrían estimar dichas ecuaciones de manera más eficiente?

Modelos de Ecuaciones simultáneas: especificación e identificación

En los estudios de modelos econométricos realizados hasta este momento se presentan relaciones entre las variables explicativas, normalmente denotadas por X, y explicativas, Y, en una única dirección. Más concretamente, de X hacia Y. Sin embargo, existen situaciones en las que se presenta una influencia en los dos sentidos entre las distintas variables, es decir, una variable que actúa como explicativa en una ecuación puede hacerlo como explicada en otra. Por tanto, básicamente, la diferencia entre un modelo de ecuaciones simultáneas y otro de regresión consiste en que haya variables explicadas en el segundo miembro de alguna de las ecuaciones.
Se establece entonces la siguiente clasificación de variables:

- Variables endógenas, que son aquellas variables que vienen explicadas dentro del modelo y que podrán aparecer como explicativas,
- Variables predeterminadas, que son aquellas cuyos valores deben ser previamente conocidos para determinar el valor de las variables endógenas (y por tanto, aparecen como explicativas). Se clasifican en exógenas corrientes, exógenas retardadas y endógenas retardadas.

Es decir, las variables endógenas son aquellas cuyos valores corrientes (referidos al momento actual t) son explicados por el modelo.

Por otro lado, las variables predeterminadas son aquellas cuyos valores o bien están determinados por el comportamiento pasado del modelo (endógenas retardadas y exógenas retardadas) o se fijan fuera del modelo en el momento actual (exógenas corrientes). Por tanto, las variables exógenas son las predeterminadas que no son endógenas.

Consideremos el siguiente modelo de ecuaciones simultáneas (Ejemplo 1):

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t, \\ I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + v_t, \\ Y_t &= C_t + I_t + G_t, \end{aligned}$$

donde C es el consumo privado, Y la demanda agregada, I la inversión y G el gasto público.

En este modelo, C_t, I_t e Y_t son variables endógenas (que a su vez aparecen también como explicativas) y G_t e Y_{t-1} son variables predeterminadas, la primera exógena corriente y la segunda endógena retardada.

¿Cuál sería la clasificación de las variables presentes en el modelo de ecuaciones simultáneas constituido por las ecuaciones (1) y (2)?

Escribiendo todas las variables de las ecuaciones (1) y (2) en un único miembro se obtiene la forma estructural del sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} -P_i + \alpha_1 \cdot V_i + \alpha_2 \cdot HD_i + \alpha_3 \cdot S_i + u_{1i} &= 0, \\ -V_i + \beta_1 \cdot P_i + \beta_2 \cdot RAM_i + u_{2i} &= 0, \end{aligned}$$

mientras que la forma reducida consiste en expresar las variables éndogenas en función de las predeterminadas, es decir, lo obtenido en las ecuaciones (3) y (4). Para g variables endógenas (adviértase que hay tantas ecuaciones en el modelo como variables endógenas) y k variables predeterminadas, denotando como $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ a los vectores columna formados por las variables endógenas, predeterminadas y perturbaciones, respectivamente, se tiene la forma estructural se puede expresar como:

$$\mathbf{y}^t \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{B} + \mathbf{u}^t = \mathbf{0}^t,$$

donde $\mathbf{0}$ es un vector de ceros de dimensiones adecuadas. La forma reducida se expresará como:

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{v}^t,$$

verificándose que $\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$ y $\mathbf{v}^t = -\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$.

La forma estructural del sistema de ecuaciones simultáneas formado por las ecuaciones (1) y (2) viene dado por:

$$\mathbf{y}^t = (P_i, V_i), \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^t = (HD_i, S_i, RAM_i), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Adviértase que $\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{B}$ contiene (por columnas) los coeficientes de las variables endógenas y predeterminadas, respectivamente.
La forma reducida se obtendría teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\beta_1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En tal caso se obtendrían las ecuaciones (3) y (4).

Téngase en cuenta que la forma reducida se puede expresar como:

$$P_i = \gamma_1 \cdot HD_i + \gamma_2 \cdot S_i + \gamma_3 \cdot RAM_i + v_{1i}, \quad (5)$$
$$V_i = \delta_1 \cdot HD_i + \delta_2 \cdot S_i + \delta_3 \cdot RAM_i + v_{2i}, \quad (6)$$

donde no se incumple el principio de exogeneidad, por lo que sería lícito su estimación por MCO. Ahora bien, ¿la estimación por MCO de las ecuaciones (5) y (6) sería útil para estimar los coeficientes de las ecuaciones iniciales (1) y (2)? Es decir, ¿la estimación de la forma reducida puede ser útil para la estimación de la forma estructural?
De forma intuitiva, una vez obtenidas las estimaciones de los coeficientes de las ecuaciones (5) y (6) y teniendo en cuenta la relación de éstos con los de las ecuaciones (3) y (4) se puede establecer la siguiente identificación:

$$\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\gamma}_1, \quad \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\gamma}_2, \quad \frac{\beta_2\cdot\alpha_1}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\gamma}_3,$$

$$\frac{\alpha_2\cdot\beta_1}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\delta}_1, \quad \frac{\alpha_3\cdot\beta_1}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\delta}_2, \quad \frac{\beta_2}{1-\alpha_1\cdot\beta_1} = \widehat{\delta}_3.$$

Es decir, para obtener las estimaciones de los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) habría que resolver un sistema, dado por $\widehat{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$, de 6 ecuaciones y 5 incógnitas (α_1, α_2, α_3, β_1 y β_2). Por tanto, se está ante un sistema que no tiene por qué tener solución única.

Considerando, las siguientes modificaciones del sistema de ecuaciones simultáneas inicial:

Modelo 2: $P = f(V, HD, S), \quad V = f(P, HD, RAM),$

Modelo 3: $P = f(V, HD, S, RAM), \quad V = f(P, HD, RAM),$

¿es posible obtener las estimaciones de los coeficientes de la forma estructural a partir de las estimaciones de la forma reducida?

¿Es eficiente tener que resolver cada vez el sistema $\widehat{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$? ¿Qué ocurre en aquellos casos dónde no hay solución? ¿O con los que hay más de una? ¿Con cuál quedarse?

La identificación de un modelo de ecuaciones simultáneas consiste en la posibilidad o imposibilidad de obtener una estimación de los coeficientes de la forma estructural a partir de la estimación de los coeficientes de la forma reducida. Es decir, ¿a partir de $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ se puede obtener $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ y $\widehat{\mathbf{B}}$?

Como se ha visto con anterioridad, esto se puede abordar resolviendo el sistema de ecuaciones $\widehat{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$, de manera que pueden darse las siguientes situaciones.

Una ecuación de la forma estructural se dice que está identificada si, y solamente si, todos sus parámetros pueden obtenerse a partir de las estimaciones de la forma reducida. Ahora bien, hay dos casos de identificación:

- Una ecuación de la forma estructural está exactamente identificada si existe una única forma de obtener sus parámetros a partir de la forma reducida.
- Una ecuación de la forma estructural está sobreidentificada cuando se dispone de más de un conjunto de estimaciones para uno o más parámetros.

Finalmente, el sistema será identificado en su conjunto si lo están todas y cada una de las ecuaciones del mismo.

Por otro lado, en el caso en el que no sea posible obtener una estimación de los parámetros de la forma estructural a partir de los de la estimación de la forma reducida, se dirá que dicha ecuación está subidentificada. Y en tal caso, el modelo estará subidentificado.

Tras lo expuesto hasta el momento surgen las siguientes cuestiones que serán abordadas a continuación:

- Tradicionalmente se referencia a la identificación como el problema de la identificación ya que no siempre es posible estimar los coeficientes de la forma estructural a partir de la estimación de los coeficientes de la forma reducida. ¿Por qué ocurre esto? ¿Por qué unas veces sí y otras no?
- ¿Para clasificar el sistema de ecuaciones simultáneas en identificado o subidentificado hay que resolver siempre el sistema de ecuaciones $\widehat{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}$? ¿Existen métodos que faciliten la clasificación de cada ecuación del sistema de ecuaciones simultáneas?

¿Por qué la identificación es un problema?

Para analizar la identificabilidad de un sistema de ecuaciones simultáneas hacemos un recuento de incógnitas para la relación que liga la forma estructural con la forma reducida.

En la forma estructural los parámetros a estimar son $\frac{g\cdot(g+1)}{2} + k \cdot g + (g^2 - g)$, mientras que en la forma reducida los parámetros a estimar son $\frac{g\cdot(g+1)}{2} + k \cdot g$. Por tanto, la diferencia entre el número de parámetros a estimar de la forma estructural y el número de parámetros a estimar en la forma reducida viene dado por $g \cdot (g-1)$.

Como es evidente, necesitamos que la diferencia anterior sea cero, ya que en tal caso se tendrá el mismo número de parámetros a estimar en una forma como en la otra y entonces será posible obtener de forma única la estimación de la forma estructural a partir de la reducida.

La manera más común de obtener información que haga que $g \cdot (g-1)$ sea cero, es imponer restricciones de nulidad (es decir, que no aparezcan todas las variables endógenas o predeterminadas, para lo cual sus correspondientes coeficientes han de ser cero) o de linealidad (es decir, que combinaciones lineales de los parámetros a estimar sean nulas) sobre los parámetros en estudio.

Por tanto, el problema de identificación radica en la cantidad de información disponible sobre cada una de las ecuaciones.

Identificación con restricciones de nulidad

Una regla general de identificación de una ecuación sería:

$$\left.\begin{array}{l} rg(A_h) < g-1 \\ k-k_h < g_h-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ecuación subidentificada}$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A_h) = g-1 \\ k-k_h = g_h-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ecuación exactamente identificada}$$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A_h) = g-1 \\ k-k_h > g_h-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ecuación sobreidentificada}$$

donde g_h y k_h son, respectivamente, el número de variables endógenas y predeterminadas presentes en dicha ecuación y $\mathbf{A}_h$ es la submatriz formada, sin más que observar la matriz $\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{\Gamma}}{\mathbf{B}}\right)$, por los coeficientes de las variables endógenas/predeterminadas de las restantes ecuaciones que acompañan a los coeficientes nulos de las variables endógenas/predeterminadas de la ecuación h en estudio.

Para el Modelo 1 se tiene que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

de forma que claramente $g = 2$ y $k = 3$. Entonces, observando los elementos no nulos de $\mathbf{A}$, la primera ecuación es exactamente identificada ya que:

- $\mathbf{A}_1 = \beta_2$, por lo que $rg(\mathbf{A}_1) = 1 = g - 1$.
- $g_1 = 2$, $k_1 = 2$, por lo que $k - k_1 = 1 = g_1 - 1$.

Mientras que la segunda es sobreidentificada ya que:

- $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, por lo que $rg(\mathbf{A}_2) = 1 = g - 1$.
- $g_2 = 2$, $k_2 = 1$, por lo que $k - k_2 = 2 > 1 = g_2 - 1$.

Por tanto, el modelo es sobreidentificado.

Para el Modelo 2 se tiene que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Se observa que en la primera ecuación no hay cambios con respecto al caso anterior, por lo que su identificación no va a cambiar. Por otro lado, se tiene que la segunda ecuación es exactamente identificada ya que:

- $\mathbf{A}_2 = \alpha_3$, por lo que $rg(\mathbf{A}_2) = 1 = g - 1$.
- $g_2 = 2$, $k_2 = 2$, por lo que $k - k_2 = 1 = g_2 - 1$.

Por tanto, el modelo es exactamente identificado.

¿Qué ocurrirá en el Modelo 3? En este caso, comparándolo con el Modelo 2, sólo se modifica la primera ecuación, por lo que la segunda sigue siendo exactamente identificada. En cuanto a la primera, puesto que no existe la matriz $\mathbf{A}_1$ y $k - k_1 = 3 - 3 = 0 < 1 = g_1 - 1$ se tiene que dicha ecuación, al igual que el sistema, es subidentificado.

Supongamos que las combinaciones o restricciones lineales entre los parámetros las podemos expresar de la siguiente forma:

$$(\mathbf{\Phi}_h)_{r_h\times(g+k)}\cdot(a_h)_{(g+k)\times 1}=\mathbf{0}_{r_h\times 1},$$

donde $\mathbf{\Phi}_h$ es una matriz con tantas filas como restricciones, r_h, y columnas como parámetros tenga la ecuación h en estudio, y el vector a_h contiene todos los parámetros de dicha ecuación (columna h de la matriz $\mathbf{A}$).

En tal caso, si:

- $rg(\mathbf{\Phi}_h\mathbf{A})<g-1 \Longrightarrow$ la ecuación no es identificable.
- $rg(\mathbf{\Phi}_h\mathbf{A})=g-1$ y $rg(\mathbf{\Phi}_h)=g-1 \Longrightarrow$ la ecuación es exactamente identificada.
- $rg(\mathbf{\Phi}_h\mathbf{A})=g-1$ y $rg(\mathbf{\Phi}_h)>g-1 \Longrightarrow$ la ecuación es sobreidentificada.

En este caso, no existen restricciones de linealidad como tales en los Modelos 1, 2 y 3, si no que se han de considerar las restricciones de nulidad como casos particulares de restricciones de linealidad.
Así, para el Modelo 1 se tiene que la primera ecuación es exactamente identificada ya que:

- $\mathbf{\Phi}_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_1) = 1 = g - 1$.
- $\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{A} = (0\ \beta_2)$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{A}) = 1 = g - 1$.

Mientras que la segunda es sobreidentificada:

- $\mathbf{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_2) = 2 > 1 = g - 1$.
- $\mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{A}) = 1 = g - 1$.

Para el Modelo 2 se tiene que las dos ecuaciones son exactamente identificadas ya que la primera ecuación no ha cambiado y para la segunda se verifica que:

- $\mathbf{\Phi}_2 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0)$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_2) = 1 = g - 1$.
- $\mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{A} = (\alpha_3\ 0)$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{A}) = 1 = g - 1$.

Como es lógido, la identificación ha de coincidir con la realizada anteriormente.

Supongamos que en el Modelo 3 se verifica que el tamaño del disco duro debería tener el mismo efecto sobre el precio del ordenador que el tamaño de la memoria RAM. ¿Cómo afecta esta información a la identificación del modelo?

En primer lugar, puesto que esta restricción afecta exclusivamente a la primera ecuación, se tiene que la identificación de la segunda coincide con la del Modelo 3, es decir, exactamente ientificada.

Por otro lado, la restricción anterior se puede expresar como $\alpha_2 - \alpha_4 = 0$, es decir, $\mathbf{\Phi}_1 = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1)$, por lo que $rg(\mathbf{\Phi}_1) = 1 = g - 1$. Además, como en este caso se tiene que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

se verifica que $\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{A} = (\alpha_2 - \alpha_4\ \ \beta_2 - \beta_3) = (0\ \ \beta_2 - \beta_3)$ y, entonces, $rg(\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{A}) = 1 = g - 1$. Es decir, la ecuación (al igual que el modelo) es exactamente identificada.

Estimación por mínimos cuadrados indirectos y bietápicos

Enfoques de estimación

Después de haber estudiado la naturaleza de los modelos de ecuaciones simultáneas el siguiente paso es el de la estimación de los parámetros de dichos modelos.

Tradicionalmente, los enfoques para llevar a cabo la estimación de modelos multiecuacionales se clasifican en:

Enfoque directo: cada ecuación del modelo se estima como si estuviera aislada, sin considerar el resto de ecuaciones del modelo y sin distinguir entre variables endógenas y predeterminadas. Por tanto, el método idóneo es el de MCO.

Enfoque con información limitada: se hace distinción entre variables endógenas y predeterminadas, pero al igual que en el método anterior, las ecuaciones se estiman de manera individual. En este caso, por ejemplo, dos de los métodos para la estimación bajo este enfoque son el de MCI y MC2E.

Enfoque con información completa: se estiman en su conjunto y de manera simultánea todas las ecuaciones del modelo. Un método a usar para la estimación en este caso es el de MC3E.

La elección del método de estimación a usar en cada caso depende de la naturaleza de cada ecuación y del modelo. Así, en el caso de ecuaciones y modelos subidentificados se usarán los MCO, en el caso de ecuaciones exactamente identificadas los MCI o MC2E (conducen a los mismos resultados) y en las sobreidentificadas los MC2E.
A continuación se describen cada uno de estos métodos de estimación así como algunas de sus propiedades más relevantes.

Aunque se incumpla la hipótesis de exogeneidad, cuando una ecuación es subidentificada, no queda otro remedio que estimar dicho modelo por MCO ya que no es posible obtener la estimación de los coeficientes de la forma estructural a partir de las estimaciones de los coeficientes de la forma reducida.
Así, la estimación de la primera ecuación del Modelo 3 se obtendría a partir de la expresión:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{Z}^t\mathbf{Z}\right)^{-1} \cdot \mathbf{Z}^t\mathbf{P},$$

donde $\mathbf{Z} = [\mathbf{V}\ \mathbf{HD}\ \mathbf{S}\ \mathbf{RAM}]$.
Una vez más, destacar que $\mathbf{Z}$ estará relacionado con $\mathbf{u}_1$ y, por tanto, los estimadores obtenidos no serán insesgados:

$$E[\widehat{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\alpha} + E[\left(\mathbf{Z}^t\mathbf{Z}\right)^{-1} \cdot \mathbf{Z}^t\mathbf{u}_1] \neq \boldsymbol{\alpha}.$$

Tampoco son consistentes.
Teniendo en cuenta la información que viene a continuación se tiene que:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0.0052495505 \\ -0.0005796375 \\ 0.1062399713 \\ 0.0767412840 \end{pmatrix}.$$

En el paquete *Ecdat* del entorno de programación **R** se dispone de la siguiente información sobre el precio de 6259 ordenadores (medidos en miles de dólares), de su velocidad (medida en MHz), del tamaño del disco duro (medido en MB), del tamaño de la pantalla (medida en pulgadas) y de la memoria RAM (medida en MB):

	P	V	HD	S	RAM
P	32946.12	745699.8	6191898	203923.1	127870.9
V	745699.82	19732905	148364402	4778339	2872742
HD	6191898.05	148364402	1504623476	38433324	28694236
S	203923.12	4778339	38433324	1340890	764390
RAM	127870.91	2872742	28694236	764390	628264

Tabla 1: Información muestral sobre los 6259 ordenadores portátiles

El método de Mínimos Cuadrados Indirectos se aplica cuando tras el proceso de identificación de la ecuación, ésta es exactamente identificada.

Consiste en obtener las estimaciones de los parámetros estructurales a partir de las estimaciones MCO, $\widehat{\mathbf{\Pi}} = \left(\mathbf{x}^t\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{x}^t\mathbf{y}$, de los parámetros de la forma reducida, considerando la relación:

$$\widehat{\mathbf{\Pi}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_h = -\mathbf{b}_h,$$

donde $\boldsymbol{\gamma}_h$ y $\mathbf{b}_h$ son las columnas h de las matrices $\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{B}$, respectivamente. Adviértase que en $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ se tiene por columnas las estimaciones de cada ecuación de la forma reducida.

Por tanto, las estimaciones buscadas, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_h$ y $\widehat{\mathbf{b}}_h$, se obtienen al resolver el sistema que queda tras realizar las operaciones pertinentes en la expresión anterior.

Si en la expresión para obtener $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ se tiene que en $\mathbf{x}$ sólo hay variables exógenas, se tiene que los estimadores así obtenidos son insesgados. En caso, contrario, serán sesgados. Por otro lado, dichos estimadores serán consistentes.

Se tiene que la primera ecuación del Modelo 1 es exactamente identificada, por lo que ha de ser estimada por MCI. Teniendo en cuenta:

$$\widehat{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} -0.0003823116 & 0.0375891 \\ 0.1209426957 & 2.8007587 \\ 0.0738442121 & -0.5518705 \end{pmatrix},$$

el sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} -0.0003823116 & 0.0375891 \\ 0.1209426957 & 2.8007587 \\ 0.0738442121 & -0.5518705 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En tal caso:

$$\alpha_1 = -\frac{0.0738442121}{0.5518705} = -0.1338071,$$

$$\alpha_2 = -0.0003823116 + 0.0375891 \cdot 0.1338071 = 0.004647377,$$

$$\alpha_3 = 0.1209426957 + 2.8007587 \cdot 0.1338071 = 0.4957041.$$

Esto es, $\widehat{P}_i = -0.1338071 \cdot V_i + 0.004647377 \cdot HD_i + 0.4957041 \cdot S_i$.

¿Son las estimaciones obtenidas insesgadas? ¿Y las de la segunda ecuación del Ejemplo 1? Adviértase que en este segundo caso las variables endógenas son C, I e Y y las predeterminadas son la constante, G y el retardo de Y.
¿Qué ocurrirá si aplicamos este método a la segunda ecuación del Modelo 1 (que es sobreidentificada)? ¿Y a la primera ecuación del Modelo 3 (que es subidentificada)?

El método de Mínimos Cuadrados en dos Etapas se puede aplicar cuando la ecuación en estudio sea exactamente identificada (proporcionando la misma estimación que los MCI) o sobreidentificada.
Las dos etapas a las que hace referencia el nombre de este método se pueden resumir como sigue:

Primera Etapa: Estimar la forma reducida del modelo, $\widehat{\mathbf{\Pi}}$.
Segunda Etapa: Sustituir las variables endógenas que aparecen en el segundo miembro de cada ecuación por sus estimaciones obtenidas a partir de la forma reducida y aplicar MCO a la nueva ecuación obtenida.

Así, por ejemplo, las estimaciones por MC2E de las ecuaciones del Modelo 1 responden a las expresiones:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{1,MC2E} = \left(\widehat{\mathbf{Z}}_1^t \widehat{\mathbf{Z}}_1\right)^{-1} \widehat{\mathbf{Z}}_1^t \mathbf{P}, \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2,MC2E} = \left(\widehat{\mathbf{Z}}_2^t \widehat{\mathbf{Z}}_2\right)^{-1} \widehat{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{V},$$

donde el subíndice hace referencia a la ecuación, por lo que $\widehat{\mathbf{Z}}_1 = \left(\widehat{\mathbf{V}}, \ \mathbf{HD}, \ \mathbf{S}\right)$ y $\widehat{\mathbf{Z}}_2 = \left(\widehat{\mathbf{P}}, \ \mathbf{RAM}\right)$ siendo $\widehat{\mathbf{V}}$ y $\widehat{\mathbf{P}}$ las estimaciones obtenidas a partir de las expresiones (5) y (6).

Teniendo en cuenta que la estimación (que en este caso es común para los modelos 1, 2 y 3) de la forma reducida es:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_i &= -0.0003823116 \cdot HD_i + 0.1209426957 \cdot S_i \\ &\quad +0.0738442121 \cdot RAM_i, \qquad (7)\\ \widehat{V}_i &= 0.0375891 \cdot HD_i + 2.8007587 \cdot S_i - 0.5518705 \cdot RAM_i, \qquad (8)\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\widehat{\mathbf{Z}}_1^t \widehat{\mathbf{Z}}_1 = \begin{pmatrix} 17374480 & 148364406 & 4778339 \\ 148364406 & 1504623476 & 38433324 \\ 4778339 & 38433324 & 1340890 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_1^t \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 733319.1 \\ 6191898.05 \\ 203923.12 \end{pmatrix},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\widehat{\mathbf{V}}^t \cdot \widehat{\mathbf{V}} = 17374480$, $\widehat{\mathbf{V}}^t \cdot \mathbf{HD} = 148364406$, $\widehat{\mathbf{V}}^t \cdot \mathbf{S} = 4778339$ y $\widehat{\mathbf{V}}^t \cdot \mathbf{P} = 733319.1$.

También se verifica que:

$$\widehat{\mathbf{Z}}_2^t\widehat{\mathbf{Z}}_2 = \begin{pmatrix} 31737.03 & 127870.9 \\ 127870.9 & 628264 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{Z}}_2^t\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 733319.1 \\ 2872742 \end{pmatrix},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\widehat{\mathbf{P}}^t \cdot \widehat{\mathbf{P}} = 31737.03$, $\widehat{\mathbf{P}}^t \cdot \mathbf{RAM} = 127870.9$ y $\widehat{\mathbf{P}}^t \cdot \mathbf{V} = 733319.1$. En tal caso se tiene que:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{1,MC2E} = \begin{pmatrix} -0.133792384 \\ 0.004646962 \\ 0.495663550 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2,MC2E} = \begin{pmatrix} 26.0231201 \\ -0.7239915 \end{pmatrix}.$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_i &= -0.133792384 \cdot V_i + 0.004646962 \cdot HD_i + 0.495663550 \cdot S_i, \\ \widehat{V}_i &= 26.0231201 \cdot P_i - 0.7239915 \cdot RAM_i. \end{aligned}$$

Adviértase que las estimaciones de la primera ecuación coinciden (salvo errores de redondeo) con las ofrecidas por MCI.

¿En qué consisten las dos etapas de este método de estimación? La idea es muy sencilla, consideremos, por ejemplo, la primera ecuación (1) del Modelo 1:

$$P_i = \alpha_1 \cdot V_i + \alpha_2 \cdot HD_i + \alpha_3 \cdot S_i + u_{1i}.$$

Como se ha ilustrado a lo largo del tema, se desaconseja la estimación por MCO de esta ecuación debido a la relación entre V_i y u_{1i}. Sin embargo, al estimar V_i a partir de la forma reducida donde sólo hay variables exógenas se tiene que $\widehat{V}_i$ no está relacionado con v_{1i} y, por extensión, con u_{1i} y u_{2i}. Es decir, cuando en la forma estructural se sustituye V_i por $\widehat{V}_i$ de alguna manera se ha eliminado la relación inicial con la perturbación aleatoria.

Por tal motivo, al igual que en el caso de los MCI, si sólo hay variables exógenas en las predeterminadas se tendrían que los estimadores obtenidos son insesgados. Si no se da esta situación serán sesgados.

Así, por ejemplo, se tiene que la primera ecuación del Ejemplo 1 es sobreidentificada y la segunda exactamente identificada, por lo que ambas se pueden estimar por MC2E. ¿Los estimadores así obtenidos serían insesgados?

Los estimadores por MC2E son consistentes.