

ÁLGEBRA

Departamento de Álgebra
9 créditos

OBJETIVOS

Muchos objetos geométricos se describen implícitamente como el conjunto de puntos que son solución a un sistema de ecuaciones algebraicas (polinómicas) en varias variables. El análisis global y local de estos objetos se corresponde con el de ciertas estructuras algebraicas canónicamente asociadas a los mismos. Esta asignatura está diseñada con un doble objetivo. De una parte, se pretende ofrecer al alumnado una formación básica en los fundamentos de la Geometría Algebraica, mediante una introducción a esta disciplina de corte clásico y tradicional. Esto es, tal como quedó formulada después de Hilbert, Weil y Zariski. De otra parte, y en relación con los objetos algebraicos involucrados en la misma, se pretende introducir al alumno en el ámbito del Álgebra Conmutativa. El concepto central del Álgebra Conmutativa es el de ideal primo, que proporciona una visión simultánea de las (sub)variedades irreducibles de la Geometría y de los primos de la Aritmética. La asignatura concluirá precisamente con un estudio de los Dominios de Dedekind, contexto cumbre en la teoría multiplicativa de ideales, que se realizará siguiendo la clásica exposición de Noether.

Hoy día son conocidos diversos algoritmos prácticos que permiten cálculos computacionales en los tópicos objeto de la asignatura, especialmente en el estudio de los sistemas de ecuaciones algebraicas y sus soluciones. El estudio de dichos sistemas de ecuaciones será el hilo conductor de la asignatura. Un objetivo complementario de ésta será que el alumno adquiera la formación adecuada en el uso implementado de tales algoritmos, después de un rápido, pero suficiente, estudio de la noción de base de Groebner, en que estos se basan.

PROGRAMA

I. ANILLOS DE POLINOMIOS Y VARIEDADES ALGEBRAICAS.

Conceptos básicos en anillos conmutativos. Representación algebraica de los polinomios. Anillos de polinomios multivariados. Lema de Dickson. Órdenes monomiales. Algoritmo de la división multivariado. Bases de Groebner. Teorema de la Base de Hilbert para $k[X_1, \dots, X_n]$. Sistemas de ecuaciones algebraicas y variedades algebraicas. Algoritmo de Buchberger. Triangulación de un sistema de ecuaciones algebraicas. Resolución de algunos sistemas de ecuaciones algebraicas. Ideales primos y maximales, nilradical y radical de un ideal. Radical de Jacobson. Conjuntos multiplicativos y existencia de primos. Definición de espectro primo. Descripción del espectro primo de $k[X, Y]$.

II. MÓDULOS

Endomorfismos de un grupo abeliano y módulos. Teoremas de isomorfía. Generadores y módulos libres. Teorema de Cayley-Hamilton. Lema de Nakayama. Sucesiones exactas. Sucesiones exactas cortas y escindidas. Condiciones de cadena. Módulos noetherianos y artinianos. Longitud. Teorema de la Base de Hilbert.

III. DEPENDENCIA ALGEBRAICA Y EL TEOREMA DE LOS CEROS DE HILBERT.

Elementos enteros en extensiones de anillos. Extensiones enteras y extensiones finitas. Clausura entera: Dominios normales. El Lema de Normalización de Noether. Dependencia entera en extensiones de cuerpos. Forma débil del Teorema de los ceros. Variedades algebraicas y correspondencia de Zariski. Teorema de los Ceros de Hilbert. Criterio de existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas. Variedades irreducibles e ideales primos. El espectro de un álgebra afín. Topología de Zariski. Descomposición de una variedad en componentes irreducibles. Primos minimales.

IV. LOCALIZACIÓN.

Anillos y módulos de fracciones. Extensión y contracción de ideales. Descripción del espectro de un anillo de fracciones. Localización en un primo. Lema de Nakayama para un anillo local. Módulos finitamente generados sobre un anillo local. Fracciones y exactitud. Propiedades locales. Localización y cocientes. Funciones regulares.

V. DIMENSIÓN.

Dimensión de Krull. Anillos cero-dimensionales. Anillos artinianos. Dimensión de un álgebra afín como espacio vectorial. Ideales cero-dimensionales. Sistemas de ecuaciones algebraicas con un número finito de soluciones. Teorema del Ascenso. Dimensión de Krull de una extensión finita.

Bases de trascendencia. Teorema de Steinitz. Dimensión de Krull y grado de trascendencia. Dimensión de un álgebra afín. Dimensión de una variedad. Eliminación de variables. Cálculo de la dimensión a través de Bases de Groebner. Parametrización de algunas variedades sencillas.

VI. DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA Y DOMINIOS DE DEDEKIND

El problema de la factorización única de ideales. Descomposición primaria. Ideales fraccionarios. Inversibilidad de ideales: Dominios de Dedekind. Carácter local de los Dominios de Dedekind. Valoraciones discretas y Anillos de valoración discreta. Caracterizaciones de los anillos de valoración discreta: equivalencia con la regularidad en dimensión uno. Caracterización de los Dominios de Dedekind como dominios noetherianos normales de dimensión uno. Caracterización de los Dominios de Dedekind como dominios con la propiedad de factorización única de ideales.

BIBLIOGRAFÍA

- M. Atiyah, I. G. MacDonald, Introducción al Álgebra Conmutativa. Reverté, 1989.
- D. A. Cox, J. B. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. UTM Springer, 1996-2007.
- D. Eisenbud, Commutative algebra with a view toward Algebraic Geometry. GTM Springer, 1994.
- E. Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Birkhauser, 1985.
- H. Matsumura, Commutative algebra. Benjamin, 1980.
- M. Reid, Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society Student Texts 29, Cambridge University Press, 1995.
- José Gómez Torrecillas, Álgebra, Guía de estudio, edición 2010. Universidad de Granada, 2010.
- Pascual Jara. Notas de Trabajo 6. Álgebra Conmutativa. Univ. de Granada 2009.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

El alumno puede optar

A) por un sistema de evaluación continuo; en este caso la calificación final resultará de los siguientes criterios ponderados:

- Valoración del trabajo de casa: 15%
- Pruebas escritas no presenciales: 15%
- Examen final presencial: 70%
- Se realizarán dos exámenes parciales y un final.
- Los exámenes parciales eliminan materia.

B) por un sistema de evaluación final, en este caso la calificación será la obtenida en el examen final.

Los exámenes finales podrán ser distintos según sea el sistema de evaluación elegido.