Funciones reales de variable real: Gráficas, límites y continuidad.

Práctica 3 (Específica de la asignatura de Cálculo Matemático en E.U.A.T.)

Introducción

Una vez conocidas las ideas básicas del programa *Mathematica* podemos centrarnos en los comandos y herramientas más apropiados para el desarrollo de la asignatura de Cálculo Matemático. En esta práctica vamos a presentar las herramientas básicas para estudiar la continuidad de una función. Tales herramientas pueden ser gráficas o analíticas.

En el grupo de herramientas gráficas tenemos los comandos **Plot**, **Plot3D**, **Show**, **ParametricPlot**, **ParametricPlot3D** y **Options**. Con ellos representaremos curvas, superficies y funciones en general.

Como herramienta analítica veremos el comando **Limit**. Con este comando podremos calcular límites y límites laterales de funciones tantos en puntos reales como en infinito.

Al final, después de los ejercicios y como un apéndice, veremos algunas gráficas predefinidas en *Mathematica* por medio del comando **Graphics**.

Antes de empezar dos recordatorios:

1) Como ya se ha comentado en las prácticas anteriores, *Mathematica* dispone de una ayuda en la que todos estos comandos están perfectamente explicados y puede ser consultada en cualquier momento para aclarar detalles concretos. Para acceder a esta ayuda basta con pulsar el menú **Help** y después en **Help Browser** ...

2) Siempre es conveniente hacer una limpieza para poder utilizar símbolos usuales sin temor a posibles errores por definiciones previas.

```
Clear["Global`*"]
```

Gráficas

Consideremos una función en una variable $y = f(x)$ con x variando entre a y b. Para representar la gráfica de esta función usamos la orden

Plot[f[x],{x, a, b}].

La función **f[x]** puede estar definida con anterioridad o dentro mismo de la orden **Plot**.

- **Ejemplo 1** (Definiendo primero las funciones)

```
g[x_] := Sin[x];
f[x_] := Cos[x];
Plot[g[x], {x, 0, 2 Pi}]
Plot[f[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

- **Ejemplo 2** (Definiendo las funciones dentro de la orden **Plot**)

```
Plot[(x^2 - 4) / ((x + 1) * (x - 1) * (x - 3)), {x, -3, 5}];
```

Como habrás observado, *Mathematica* realiza de forma automática la elección de la escala en ambos ejes para que la gráfica se pueda ver lo mejor posible.

Para representar varias funciones a la vez en el mismo dominio, bastará con incluirlas entre llaves y separarlas mediante comas de la siguiente forma

Plot[{ f[x], g[x] }, {x, a, b}].

- **Ejemplo 3**

```
Plot[{g[x], f[x]}, {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

En el ejemplo 3, dentro de la orden **Plot,** se han añadido una opción para modificar la salida, en concreto, el color de las gráficas mediante el comando **RGBColor[*,*,*]**. No describiremos aquí todas las posibilidades en cuanto a opciones. Para obetener una lista de todas ellas basta con ejecutar la orden **Options[Plot]**. Una vez más, recuerda que cada una de las posibilidades se puede buscar posteriormente en la ayuda para una completa descripción.

```
Options[Plot]
```

Consideramos ahora una función en dos variables $z = f(x,y)$ con x variando entre a y b, e y variando entre c y d. Para pintar su gráfica utilizamos la orden

Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d}].

Como en el caso de funciones en una variable, **f [x, y]** puede estar definida con anterioridad o dentro del comando **Plot**. Sin embargo, debes tener cuidado con las opciones gráficas en **Plot3D** pues no son exactamente las mismas que en **Plot**.

■ Ejemplo 4: "La silla de montar"

```
Plot3D[x^2 - y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}];
```

También podemos representar curvas en el plano dadas por sus ecuaciones paramétricas: $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde t el parámetro varía entre los valores a y b. Usamos el comando

ParametricPlot[{f[t], g[t]},{t, a, b}].

Las opciones y variaciones de este comando son similares a las del comando **Plot**.

■ Ejemplo 5

```
ParametricPlot[{t * Sin[5 * t], t * Cos[5 * t]}, {t, 0, 2 Pi}];
```

■ Ejemplo 6

Vamos a dibujar tres circunferencias de centro (0,0) y radios 1, 2 y 3 respectivamente. Además vamos a asignarles colores distintos.

```
ParametricPlot[{{3 Sin[t], 3 Cos[t]}, {2 Sin[t], 2 Cos[t]}, {Sin[t], Cos[t]}}, {t, 0, 2 P
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, AspectRatio ->
```

Límite de una función

En esta sección analizaremos los conceptos de límite y continuidad.

■ Ejemplo 7

Consideremos la función

```
f[x_] := Sin[x] / x
```

Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$ excepto, eventualmente, para $x = 0$. La dibujamos en torno al punto conflictivo para "ver" lo que ocurre cerca del mismo:

```
Plot[f[x], {x, -6 Pi, 6 Pi}, PlotRange -> {-0.3, 1.2}]
```

Mathematica dispone de una orden para calcular los límites laterales de una función en un punto:

Limit[*función*, *variable* -> *punto*, ***Direction*** -> **1]** **(Límite por la izquierda)**

Limit[*función*, *variable* -> *punto*, ***Direction***-> **-1]** **(Límite por la derecha)**

En nuestro caso, los límites laterales cuando x tiende a 0 se determinan como sigue:

```
Limit[f[x], x -> 0, Direction -> 1]
Limit[f[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

La existencia del límite está garantizada cuando los dos límites laterales existen y son iguales, tal como sucede en este ejemplo.

■ Ejemplo 8

Mathematica reconoce, a través del mismo comando **Limit,** la mayoría de los límites infinitos.

```
Limit[Tan[x], x -> Pi / 2, Direction -> 1]
```

```
Limit[Tan[x], x -> Pi / 2, Direction -> -1]
```

■ Ejemplo 9

Podemos calcular límites en infinito. Observemos que en estos casos no tiene sentido hablar de los dos límites laterales porque uno de ellos, simplemente, no tiene "sentido de ser".

```
Limit[Exp[-x], x -> Infinity]
```

```
Limit[Exp[-x], x -> -Infinity]
```

```
Limit[Log[x], x -> Infinity]
```

■ Ejemplo 10 (Cosas que pueden pasar)

Si definimos funciones mediante la orden **Which**, con la versión 3.0 de *Mathematica*, la orden **Limit** no se puede usar .

```
g[x_] := Which[-Pi <= x <= 0, Sin[x], 0 < x <= Pi, 1 - x, True, (x / 2) ^2]
```

Los puntos en los que hay que determinar la existencia de límite son $-\pi$, 0 y π. Intentamos usar la orden **Limit** para calcular los límites laterales en $-\pi$.

```
Limit[g[x], x -> -Pi, Direction -> 1]
```

```
Limit[g[x], x -> -Pi, Direction -> -1]
```

Comprobamos que no obtenemos ningún resultado. ¡**Atención:** si utilizamos la versión 5.2 (o posteriores) de *Mathematica*, entonces sí obtenemos resultados! Con las versiones 4.x, 5.0 y 5.1 (si alguna de estas la utilizas) tendrás que comprobar por ti mismo si funciona o no esta manera de proceder.

Para eludir el problema que ha surgido podemos definir cuatro funciones diferentes a partir de las expresiones que aparecen en la definición de ***g*** y que están asociadas a la partición $(-\infty, -\pi) \cup [-\pi, 0] \cup (0, \pi] \cup (\pi, +\infty)$.

$$g1[x\_] := \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$g2[x\_] := Sin[x]$$
$$g3[x\_] := 1 - x$$
$$g4[x\_] := \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

En realidad hubiera bastado con definir **g1**, **g2** y **g3**, ya que **g4** tiene la misma expresión que **g1**. Calculemos con estas funciones auxiliares los límites deseados.

```
Limit[g1[x], x -> -Pi, Direction -> 1]
```

```
Limit[g2[x], x -> -Pi, Direction -> -1]
```

Los límites laterales en $x = -\pi$ existen pero son diferentes, luego en $x = -\pi$ hay una discontinuidad de salto. Por cierto, como seguro habrás adivinado, esta forma de actuar para el cálculo de los límites laterales va a funcionar en todas las versiones de *Mathematica*.

Veamos qué ocurre en los otros dos puntos.

```
Limit[g2[x], x -> 0, Direction -> 1]
Limit[g3[x], x -> 0, Direction -> -1]

Limit[g3[x], x -> Pi, Direction -> 1]
Limit[g4[x], x -> Pi, Direction -> -1]
```

Hemos comprobado que ***g*** tambíen tiene discontinuidades de salto en $x = 0$ y en $x = \pi$. Podemos ilustrar gráficamente la situación representando por separado las cuatro funciones y representándolas conjuntamente.

```
graf1 = Plot[g1[x], {x, -2 Pi, -Pi}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];

graf2 = Plot[g2[x], {x, -Pi, 0}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}];

graf3 = Plot[g3[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}];

graf4 = Plot[g4[x], {x, Pi, 5}, PlotStyle -> {RGBColor[0.5, 0, 0.5]}];

Show[{graf1, graf2, graf3, graf4}];
```

También podríamos haber representado directamente la función ***g***.

```
Plot[g[x], {x, -2 Pi, 2 Pi}];
```

La diferencia entre las dos representaciones es que en la segunda aparecen segmentos verticales que no pertenecen en realidad a la gráfica de la función.

Continuidad de una función

Veamos un par de ejemplos de aplicación de lo visto en la sección anterior.

■ Ejemplo 11

Estudiemos la continuidad de la función

$$f(x) = arctg(x), \quad si \quad x < 0,$$
$$f(x) = sen^2(2x), \quad si \quad 0 <= x < 1,$$
$$f(x) = \sqrt{x^2+3}, \quad si \quad x >= 1.$$

Es claro que sólo es necesario estudiar la continuidad en los puntos conflictivos, esto es, en $x=0$ y $x=1$.

Sabemos que una función ***f*** es continua en un punto $x=x_0$ si y sólo si

1) ***f*** está definida en $x=x_0$,
2) existen los dos límites laterales en $x=x_0$,
3) los límites laterales son iguales a $f(x_0)$.

Antes de todo definimos cada uno de los trozos por separado (para tomar límites laterales).

```
f1[x_] := ArcTan[x];
f2[x_] := (Sin[2 x])^2;
f3[x_] := Sqrt[x^2 + 3];
```

Y la función completa con el comando **Which**, por si podemos utilizar en algún momento esta forma de definir funciones (o nuestra versión de *Mathematica* es compatible con ella para el cálculo de límites laterales).

```
f[x_] := Which[x < 0, f1[x], 0 <= x < 1, f2[x], True, f3[x]];
```

Estudio en *x=0*. Calculamos los límites laterales, a la izquierda usando **f1** y a la derecha usando **f2**.

```
Limit[f1[x], x -> 0, Direction -> -1]

Limit[f2[x], x -> 0, Direction -> 1]
```

Los límites laterales en *x=0* coinciden. Calculamos ***f****(0)* (usando **f2**).

```
f2[0]
```

Por tanto la función ***f*** es continua en *x=0*.

Estudio en *x=1*. Calculamos los límites laterales, a la izquierda usando **f2** y a la derecha usando **f3**.

```
Limit[f2[x], x -> 1, Direction -> -1]

Limit[f3[x], x -> 1, Direction -> 1]
```

Aunque el seno de un número siempre está entre -1 y 1, expresamos el límite por la izquierda numéricamente para que no quepa duda.

```
N[Limit[f2[x], x -> 1, Direction -> -1]]
```

Por tanto, como los límites laterales en *x=1* no coinciden, ***f*** no es continua en *x=1*.

Concluimos que ***f*** es continua en todos los números reales salvo en *x=1*. Veamos gráficamente esto hecho dibujando la función completa en el intervalo *[-2,3]*.

```
Plot[f[x], {x, -2, 3}]
```

O bien dibujando trozo a trozo y utilizando el comando **Show**.

```
graf1 = Plot[f1[x], {x, -2, 0}];
graf2 = Plot[f2[x], {x, 0, 1}];
graf3 = Plot[f3[x], {x, 1, 3}];

Show[graf1, graf2, graf3]
```

■ Ejemplo 12

Estudiemos la continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x+a}{1+e^{1/x}}, \quad \text{si} \quad x < 0,$$
$$f(0) = 1$$
$$f(x) = \sqrt{b+x^2}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Es claro que sólo es necesario estudiar la continuidad en *x=0*.

*) La función f está definida en *x=0* y su valor es igual a *1*.

*) Definimos f de modo que sus límites laterales puedan ser calculados (sin problemas) con *Mathematica*.

```
Clear[a, b, f1, f2];
f1[x_] := (x + a)/(1 + Exp[1/x])
f2[x_] := Sqrt[b + x^2]
```

Como

```
Limit[f1[x], x -> 0, Direction -> 1]
Limit[f2[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

entonces los límites laterales existen. Además coinciden si y sólo si $a = \sqrt{b}$. Así, la función tiene límite si y sólo si $a = \sqrt{b}$. Por tanto, la función es continua si y sólo si $a = \sqrt{b} = f(0) = 1$. En definitiva, la función es continua si y sólo si $a = b = 1$.

Representemos gráficamente la función cuando se cumple la condición que asegura la continuidad.

```
f[x_] := Which[x <= 0, (x + 1)/(1 + Exp[1/x]), x > 0, Sqrt[1 + x^2]]
Plot[f[x], {x, -4, 2}];
```

Ejercicios

1.- Dibuja la curva $(e^{3x} + log(5\pi x) - 3x)/(x^3 + cos(x))$ en el intervalo *[0, 1]*.

2.- Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1 - x^2$. Halla las funciones compuestas *fog* y *gof* y represéntalas en el intervalo *[-2, 2]*. ¿Puedes interpretar el mensaje de error que te indica en ambas gráficas? Ajusta el intervalo de representación de forma apropiada.

3.- Dibuja la siguiente curva en paramétricas: *x = cos(5t)* , *y = sen(3t)* con t en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4.- Calcula los límites de las funciones definidas por las siguientes expresiones en los valores que se indican.

a) *(x^2-4)/(x-2)* , si *x -> 2,*
b) *((t+h) 2-2 t)/h* , si *h -> 0,*

c) $\frac{x^{128}}{e^x}$, si x -> ∞,

d) $\frac{x^{128}}{e^x}$, si x -> -∞ .

5.- Estudia la continuidad de la función $x\, log(|x|)$ en $x = 0$.

6.- Indica si la función *f* es continua en todos los número reales.

$f(x) = e^{2x} - e^4$ si $x <= 2$,
$f(x) = log(x^2 - 3)$ si $2 < x <= 4$,
$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+5x^2+1}$ si $x > 4$.

7.- Realiza el ejercicio **II.13** de la relación de problemas del Tema 2 (Funciones reales de variable real).

8.- Dibuja, usando la orden **Do,** las gráficas de las funciones $sen(x+i\,\frac{\pi}{10})$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, moviendo el contador i desde 0 hasta 20 de 2 en 2 unidades.

Apéndice: Gráficas predefinidas en *Mathematica*

Las gráficas de ciertas curvas y figuras geométricas conocidas (líneas, círculos, rectángulos, puntos, poligonales,etc) se pueden obtener fácilmente usando el comando **Graphics** para generarlas y el comando **Show** para verlas. Veamos algunos ejemplos.

■ Ejemplo 13

Una recta que pasa por los puntos (1,1) y (2,3).

```
linea1 = Graphics[Line[{{1, 1}, {2, 3}}]];
Show[linea1];
```

■ Ejemplo 14

Una circunferencia de centro (0,0) y radio 3.

```
Circunferencia = Graphics[Circle[{0, 0}, 3]];
Show[Circunferencia]
```

Como puedes observar, hemos obtenido una circunferencia bastante achatada. Eso se soluciona introduciendo el comando **AspectRatio→1** dentro de **Show**.

```
Show[Circunferencia, AspectRatio → 1]
```

■ Ejemplo 15

Un círculo se dibuja usando la orden **Disk**. ¡Cuidado con las traducciones: circunferencia es Circle y círculo es Disk! Pintemos el círculo de centro (0,0) y radio 3.

```
Circulo = Graphics[ Disk[{0, 0}, 3] ];
Show[Circulo, AspectRatio → 1]
```

Cambiemos el color del círculo utilizando el comando **RGBColor[*,*,*]**.

```
Circulo = Graphics[{RGBColor[0.1, 0.1, 0.5], Disk[{0, 0}, 3]}];
Show[Circulo, AspectRatio → 1]
```

■ Ejemplo 16

Un rectángulo de vértices opuestos (x,y), (z, w) se define con el comando **Rectangle**. En este ejemplo vamos a superponer un par de rectángulos.

```
a = Graphics[{RGBColor[0.5, 0, 0.5], Rectangle[{0, 0}, {7, 3}]}];
b = Graphics[{RGBColor[0, 0.5, 0], Rectangle[{0, 0.8}, {7, 2.2}]}];
Show[a, b]
```