

Práctica 1 (común)

(Elaborada por el Profesor D. Antonio Palomares)

Introducción a *Mathematica*. Cálculo simbólico y aproximado.

Introducción.

En las prácticas de Cálculo y Álgebra se emplea el programa *Mathematica*, que emplearemos para resolver con la ayuda del ordenador problemas similares a los estudiados en las clases de teoría, y algunos problemas más complicados, que por su complejidad sería tedioso resolver sin ordenador. De forma incidental estas prácticas sirven para repasar y resumir algunos conceptos explicados en clase. Además aprenderemos a manejar una herramienta que permitirá aplicar los conocimientos adquiridos en las asignaturas a la resolución de problemas reales.

En las aulas de informática se emplean ordenadores conectados en red que ejecutan la versión 3.0 de *Mathematica*, aunque las órdenes que aquí se aprenden pueden usarse en otras versiones del programa.

En esta primera práctica nos familiarizaremos con los ordenadores del aula, estudiaremos cómo ejecutar el programa, cómo introducir y editar instrucciones así como ejecutar esas instrucciones para obtener resultados. También aprenderemos a hacer operaciones elementales, a usar las funciones matemáticas más usuales, que están incluidas en el programa y veremos órdenes para manipular polinomios.

Ejecutar *Mathematica*.

Al empezar la clase de prácticas puede que ya encuentre los ordenadores encendidos o incluso el programa *Mathematica* ejecutado. En esta sección de la práctica el profesor explicará qué pasos deben darse para ejecutar el programa y abrir las prácticas.

Descripción de las prácticas.

Los ficheros de *Mathematica*, como esta práctica que está leyendo, se llaman 'notebooks' y tienen extensión .NB. Al abrir uno de estos archivos se observa en la parte derecha de la ventana unos corchetes de color azul, cada uno de estos corchetes sirve para delimitar una celdilla.

Hay varios tipos de celdillas, algunas, como ésta que está leyendo son de texto, otras son de 'entrada' (In) y contienen una instrucción que se puede ejecutar, el resultado de la instrucción constituye una celdilla de 'salida' (Out).

Ahora vamos a aprender los pasos necesarios para ejecutar una celdilla de entrada. En primer lugar debemos pinchar con el ratón en cualquier caracter de la celdilla de entrada, o en el corchete de la celdilla que se encuentra a la derecha. A continuación tenemos dos posibilidades para ejecutar la celdilla. La primera es pulsar la tecla Intro, que se encuentra abajo a la derecha, en el teclado numérico. La segunda es pulsar la tecla de mayúsculas, y sin soltarla pulsar la tecla de Enter, que se encuentra a la derecha de la ñ y la ç.

Ejercicio: Siga los pasos que acabamos de ver para ejecutar la siguiente celdilla.

$$2 + 2$$

Para crear una nueva celdilla, en primer lugar mueva el ratón entre dos celdillas hasta que el cursor se ponga horizontal, en ese momento haga click con el botón izquierdo del ratón. Veremos como aparece una línea horizontal y ya podemos escribir la operación que queremos evaluar o la instrucción que queremos evaluar.

Ejercicio: Cree una celdilla nueva debajo de ésta, escriba con el teclado la operación $2+3$, y ejecute la celdilla que acaba de crear.

En el transcurso de las clases de prácticas podrá leer, en las celdillas de texto, explicaciones sobre los temas que se tratan en las prácticas. En las celdillas de entrada pueden encontrarse ejemplos que deben ejecutarse y observar como funcionan. En muchas secciones de las prácticas se incluyen ejercicios sobre lo que se acaba de explicar, y deben resolverse creando una celdilla nueva tras el enunciado. Al final se encuentran más ejercicios.

Operaciones algebraicas elementales.

Emplearemos el teclado para introducir las operaciones e instrucciones. Algunos símbolos o caracteres, como por ejemplo los paréntesis, necesitan que se pulse simultáneamente la tecla de mayúsculas. Del mismo modo se emplea la tecla de mayúsculas para introducir la barra de dividir /, el asterisco * que se emplea para multiplicar o el signo de desigualdad 'mayor que' > .

Ejercicio: Efectue la operación $(2+3)*5$.

Ejercicio: Efectue la operación $(2+3)/5$.

Otros caracteres necesitan que se emplee la tecla AltGr que se encuentra a la derecha de la barra espaciadora. Por ejemplo se necesita la tecla AltGr para introducir las llaves { }, que se encuentran junto a la ñ y en la ç, y para introducir los corchetes [] que se encuentran a la derecha de la tecla P.

El operador de la suma se introduce con +, el de la diferencia con -, el del producto con * o un espacio y el de la división con una barra / que se encuentra en la tecla del 7.

Veamos algunos ejemplos.

$$129 * 123 + 112 * 145$$

$$145 / 128 - 130 / 162$$

Ejercicio: Divida 738 entre 6.

Ejercicio: Efectúe la operación $86*117-62$.

El operador de la potenciación se introduce con ^, que es un acento que se encuentra a la derecha de la tecla P. La siguiente celdilla eleva 7 al cubo.

$$7^3$$

Para introducir el operador de la potenciación debemos pulsar la tecla de mayúsculas y sin soltarla la tecla del acento, después pulsamos la tecla de espacio y aparecerá el operador. (Si el exponente empieza con un número o una letra que no pueda llevar acento, entonces no es necesario pulsar la barra espaciadora).

Ejercicio: Calcule 5 elevado a la cuarta potencia.

Como muchas calculadoras simbólicas y otros programas similares, *Mathematica* efectúa las operaciones en un orden concreto. En primer lugar se efectúan las potencias, después las multiplicaciones y divisiones y por último las sumas y diferencias. Los paréntesis se emplean para alterar este orden, ya que las operaciones que encuentran entre paréntesis se efectúan antes que las demás.

Por ejemplo al evaluar la siguiente operación

$$2 + 3 * 4$$

se efectúa primero el producto $3*4=12$, y después se le suma 2, con lo que se obtiene $2+12=14$. Este resultado no es el mismo que el que se obtiene al sumar $2+3=5$, y luego multiplicar por 4, con lo que se obtendría 20. Si quisiéramos efectuar las operaciones de esta segunda forma tendríamos que haber usado la siguiente entrada:

$$(2 + 3) * 4$$

Ejercicio: Piense el orden en que se efectúen las siguientes operaciones y calcule el resultado manualmente antes de ejecutar las celdillas. Compruebe el resultado ejecutando dichas celdillas.

$$1 / 2 + 2 / 3 - 7 / 6$$

$$2^3 + 2 * 4$$

$$2^3 + 2 * 4$$

Sintaxis de las órdenes.

En *Mathematica* pueden usarse muchas órdenes (para dibujar gráficas, resolver ecuaciones ...) y muchas funciones (seno, coseno ...) sin más que escribirlas en las celdillas. Todas estas órdenes y funciones comienzan con mayúscula y su argumento o argumentos van entre corchetes.

Veamos por ejemplo la orden Print, que sirve para mostrar en pantalla resultados de otras instrucciones y para poder dar salidas mas elaboradas dentro de un programa.

La siguiente celdilla muestra una frase y observamos que lo que se encuentra entre comillas se muestra de forma literal.

```
Print["Esta es una frase de ejemplo"]
```

Como argumento de la orden se pueden incluir varias expresiones separadas por comas.

```
Print["El resultado de la operación es : ", 4 * 5]
```

```
Print["7*2 ----> ", 7 * 2]
```

```
Print[2, 4, " ", 6]
```

Ejercicio: Emplee la orden Print, para que aparezca en pantalla la frase "Estoy haciendo la primera práctica".

Ejercicio: Emplee la orden Print, para mostrar el área de un cuadrado de lado 7 de forma que en la pantalla aparezca una frase similar a "El área de un cuadrado de lado 7 es ...".

La orden Simplify sirve para simplificar una expresión.

```
(1 - Sqrt[5]) ^ 2 - 2 (1 - Sqrt[5]) - 4
```

```
Simplify[ (1 - Sqrt[5]) ^ 2 - 2 (1 - Sqrt[5]) - 4]
```

Ejercicio: Simplifique la expresión $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Cálculo simbólico y aproximado.

Mathematica efectúa siempre que puede los cálculos de forma simbólica.

```
(8 / 9) ^ (1 / 2)
```

A veces las operaciones involucran números con decimales, en cuyo caso *Mathematica* efectúa los cálculos en forma decimal.

```
1.234 ^ 2
```

Nosotros podemos usar el punto para obligar al programa a que use decimales, como veremos en el siguiente ejemplo, donde se hacen operaciones con el número π (π).

Para introducir el número irracional π (relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro) basta escribir Pi con el teclado, comenzando con una P mayúscula. En las siguientes celdillas calculamos, de forma exacta, la longitud de una circunferencia de radio 7 unidades, y también su área.

```
2 * Pi * 7
```

```
Pi * 7 ^ 2
```

Podemos obtener aproximaciones decimales usando el punto en el 2 o en el 7.

```
2. * Pi * 7
```

```
Pi * 7. ^ 2
```

El número irracional e (base de los logaritmos naturales) se introduce mediante una E mayúscula.

Los números π y e pueden introducirse usando la paleta 'BasicInputs'. Dicha paleta se abre desde el menú 'File', opciones 'Palettes', 'BasicInput'. También puede usarse la paleta para introducir potencias, raíces o fracciones, con lo que se obtienen expresiones aparentemente más claras, pero resulta más lento y propenso a errores.

La orden N sirve para obtener un valor numérico de una expresión dada, la salida de la orden incluye números en forma decimal con una precisión determinada, en concreto N[expr,n] devuelve la expresión expr con una precisión de n dígitos significativos (siempre que sea posible).

La siguiente instrucción devuelve el número Pi con una precisión de 20 dígitos.

`N[Pi, 20]`

El número de dígitos de precisión no tiene por qué coincidir con el número de decimales que se muestran en la salida.

`N[Pi, 5]`

`N[Pi, 12]`

Ejercicio: Calcule una aproximación decimal del número $\frac{22}{7} - \pi$.

Ejercicio: Calcule una aproximación decimal del número $22 * \pi^4$ con 8 cifras significativas. Calcule una aproximación decimal del mismo número con 17 cifras significativas.

Comandos de fichero.

En el menú 'File' (fichero) tenemos opciones para crear una nueva ventana (New) para escribir un Notebook, para abrir (Open) un fichero Notebook existente, para grabar (Save) el Notebook actual (no lo haga con esta práctica) o para grabar con otro nombre o en otro directorio (Save As...).

Por ejemplo si queremos abrir una nueva ventana para practicar algunos comandos, abriremos una nueva ventana con 'File' → 'New', si queremos grabar esas instrucciones en un fichero lo haremos con 'File' → 'Save As...' y podremos indicarle el nombre y directorio donde queremos guardarlo. Si posteriormente queremos abrir ese archivo podemos hacerlo con 'File' → 'Open', o haciendo doble click con el ratón sobre el archivo.

Opciones de edición.

La introducción de ordenes y expresiones puede agilizarse en ocasiones usando expresiones que ya hemos escrito anteriormente. Para copiar una expresión basta marcarla con el ratón (haciendo click con el ratón y desplazándolo sin soltarlo) o con el teclado (pulsando la tecla de mayúsculas y desplazando el cursor con las teclas de cursores) y después pulsar Control y C, o con el menú 'Edit' → 'Copy'.

Para pegar la expresión en otro lugar basta situar el cursor en dicho lugar y pegarla con Control y V o con el menú 'Edit' → 'Paste'.

Por ejemplo podemos suponer que ya hemos introducido la siguiente instrucción y que queremos calcular 10.123456789 al cuadrado, podemos marcar la parte de la expresión 0.123456789 y copiarla. Luego en una celdilla nueva basta poner 1, pegar la expresión que antes hemos copiado y elevarla al cuadrado con 2 .

`2 * 0.123456789`

Ejercicio: Calcule 10.123456789 al cuadrado.

Ejercicio: Empleando la siguiente celdilla calcule una aproximación del número π * $(2 + \frac{4}{5})^2$ con una precisión de 25 cifras.

`N[Pi * (2 + 4 / 5) ^ 2, 22]`

Al copiar una expresión, ésta permanece en su lugar. Si queremos que desaparezca de su sitio original para poder luego introducirla en otro lugar debemos 'cortarla' con Control y X o con el menú 'Edit' → 'Cut'.

Para 'deshacer' lo último que hayamos editado podemos emplear Control y Z o 'File' → 'Undo'. En *Mathematica* 'deshacer' es más limitado que en los procesadores de texto, y tras realizar ciertas acciones no podremos 'deshacerlas'.

Para copiar, cortar, pegar y borrar celdillas, basta marcarlas pinchando con el ratón en el corchete azul de la derecha, y luego usar el comando de edición correspondiente.

Debe tenerse cuidado al copiar algunas expresiones desde celdas de texto, ya que la expresión que se pega puede contener caracteres o notaciones que hacen que no se evalúe la nueva expresión.

Ejercicio: Copie la expresión 4^2 y compruebe que al evaluarla no se obtiene 16.

Funciones matemáticas.

Para calcular la raíz cuadrada de un número podemos emplear la función Sqrt (del inglés Square root).

`Sqrt[81]`

Observe en el siguiente ejemplo como no siempre la raíz cuadrada de x^2 da como resultado x.

`Sqrt[(-3) ^ 2]`

También comprobamos que no siempre $\sqrt{a^2 + b^2}$ es igual que a+b

`Sqrt[3 ^ 2 + 4 ^ 2]`

`3 + 4`

En *Mathematica*, la unidad imaginaria se expresa con una I o una *i*.

`Sqrt[-1]`

`I * I`

La función `Exp[x]` devuelve el valor del número e elevado a x . Su inversa es la función `Log[x]`, el logaritmo de base e (también llamado logaritmo natural o neperiano).

```
Exp[2]
```

```
Log[E^2]
```

```
Exp[Log[x]]
```

```
Log[9 * 7]
```

Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente se expresan como `Sin[x]`, `Cos[x]` y `Tan[x]`, donde el argumento se da en radianes. Observe cómo la función seno se escribe en *Mathematica* con i .

```
Sin[Pi]
```

```
Cos[0]
```

```
Cos[Pi / 2]
```

```
Tan[Pi]
```

Las funciones trigonométricas inversas también están implementadas en *Mathematica*, en concreto, `ArcSin[x]`, el arco seno, `ArcCos[x]` el arco coseno y `ArcTan[x]` la arco tangente.

```
ArcSin[1]
```

```
ArcCos[0]
```

```
ArcTan[1]
```

Las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas también pueden usarse en *Mathematica*: el seno hiperbólico `Sinh[x]`, el coseno hiperbólico `Cosh[x]` y la tangente hiperbólica `Tanh[x]`. Las funciones hiperbólicas inversas son `ArcSinh[x]`, `ArcCosh[x]` y `ArcTanh[x]`.

```
Sinh[0]^2 - Cosh[0]^2
```

```
Sinh[2] / Cosh[2] - Tanh[2]
```

La función `Abs` nos da el valor absoluto de un número.

```
Abs[4]
```

```
Abs[-4]
```

La función `Floor` sirve para redondear números, y nos devuelve la parte entera de un número, es decir el mayor número entero que es menor que el número dado.

```
Floor[2.2]
```

```
Floor[2.8]
```

```
Floor[-2.8]
```

Variables y salidas anteriores

El símbolo % hace referencia a la salida anterior.

```
5 + 7
```

```
2 * %
```

Si usamos dos símbolos %% hacemos referencia a la salida anterior a la anterior, esto es, a dos salidas atrás.

```
%% * 3
```

```
%% * 10
```

Debemos observar que tanto % o %% hacen referencia a salidas anteriores en el orden en el que se han ejecutado, no en el orden en que se encuentren escritas justo encima de la celdilla que vayamos a ejecutar.

Si ponemos un número n detrás del símbolo %, hacemos referencia a la salida número n. Así %2 hace se refiere a la segunda salida, Out[2], que hayamos calculado.

```
%5
```

El uso del % puede llevar a confusión (sobre todo si no ejecutamos las celdillas en el orden en que aparecen en pantalla), por eso en muchas ocasiones es mejor definir una variable con un valor concreto.

```
x = 2
```

```
x^2 + 4 x - 2
```

```
a = 2 + Sqrt[2] - Sqrt[3]
```

```
b = a^2 - 2
```

```
N[b]
```

Para borrar el contenido de una variable empleamos la orden Clear. En este momento la variable x tiene un valor numérico concreto, y como en la próxima sección la utilizaremos como variable y necesitaremos que no tenga ningún valor, por eso la borramos con la siguiente instrucción.

```
Clear[x]
```

Ejercicio: Defina una variable llamada a2 con el valor 37, luego evalúe la expresión $a2^2 - 9$.

Ejercicio: Borre el contenido de la variable a2.

Si queremos ejecutar una instrucción, pero no queremos que se muestre el resultado, debemos terminar la instrucción con un punto y coma (;).

```
c = 25;
c ^ 2 - 5
```

Órdenes para manipular polinomios.

La orden Collect agrupa los términos de un polinomio en potencias de una variable determinada. Por ejemplo, la siguiente instrucción escribe un polinomio como suma de potencias de x.

```
Collect[3 x + 2 x ^ 2 + 4 + 5 x + 1 - x ^ 2, x]
```

La siguiente instrucción agrupa una expresión en potencias de x, poniendo juntos los términos que no llevan x, y sacando factor común x en los términos que si llevan x.

```
Collect[4 y + 5 y x + 7 x + 2 y ^ 2 - 3 x y ^ 2, x]
```

Ahora escribimos la misma expresión como un polinomio en y.

```
Collect[4 y + 5 y x + 7 x + 2 y ^ 2 - 3 x y ^ 2, y]
```

En ocasiones la orden Collect no ordena el polinomio en potencias de la variable.

```
Collect[7 x ^ 2 + y x + 6, x]
```

Ejercicio: Escriba la expresión $x^2 - x y + y^2 + 3 x$ como un polinomio en x, y luego como un polinomio en y.

La orden Expand desarrolla una expresión efectuando multiplicaciones.

```
Expand[(2 + x) ^ 4]
```

```
Expand[(a + b) ^ 2]
```

Ejercicio: Desarrolle la expresión $(x - 1)^4$.

La orden Factor sirve para factorizar un polinomio.

```
Factor[x ^ 2 + x - 2]
```

```
Factor[16 + 32 x + 24 x ^ 2 + 8 x ^ 3 + x ^ 4]
```

```
Factor[x ^ 4 + 4 x ^ 3 y + 6 x ^ 2 y ^ 2 + 4 x y ^ 3 + y ^ 4]
```

Ejercicio: Factorice la expresión $x^3 + 3 x^2 y + 3 x y^2 + y^3$.

Por último la orden Apart, descompone una expresión racional como suma de fracciones con denominadores simples. (Esta orden servirá para integrar expresiones racionales.)

`Apart [2 / (x^2 - 1) , x]`

`Apart [(x^2 + 2 x + 2) / (x^2 - 2 x + 1) , x]`

Ejercicio: Descomponga en fracciones simples el cociente $\frac{x-1}{(x-2)^2}$.

Ejercicios.

Para hacer los ejercicios, defina d1 con el valor de la primera cifra no nula de su D.N.I. o pasaporte, d2 con el valor de la segunda cifra, y ds con la suma de todas las cifras de su D.N.I. o pasaporte.

1.- Efectúe las siguientes operaciones a) $\frac{1}{2+3}$, b) $\frac{1}{2} + 3$, c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6}$, d) $\sqrt{25-9} + \sqrt{64-5}$, e) $3^2 - 2^{5-2}$.

2.- Calcule la expresión $\frac{\pi^2 + e^3}{2 + \sin(\pi/4)}$ con una precisión de (d1+3) cifras.

3.- Calcule la expresión $\frac{\pi^e + d2}{\cos(\pi) - 2}$ con una precisión de (d2+4) cifras.

4.- Calcule 12.3456189 elevado a 1.23456129.

5.- Simplifique las siguientes expresiones a) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2$, b) $\sin^2(x) + \cos^2(x)$, c) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

6.- Halle $\frac{ds^2 - ds + 1}{ds^2 + ds - 1}$.

7.- Halle una expresión con d1+2 decimales del número $163/\ln(163)$. Halle una expresión del mismo número con ds decimales.

8.- Escriba una instrucción que muestre en pantalla la frase "Esta es una frase literal". Escriba una instrucción que muestre en pantalla una frase similar a "La novena potencia de 5 es ..." que incluya el resultado.

9.- Desarrolle la expresión $(x^2 - x - 1)^3$.

10.- Factorize la expresión $a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4$.

11.- Desarrolle la expresión $(x-y+1)^4$ y agrupe el resultado en potencias de x. Idem agrupando el resultado en potencias de y.

12.- Expresé como suma de fracciones simples la expresión $\frac{2x}{1-x^2}$.