Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2009-2010
Relación de ejercicios del tema I: Números reales . La recta real. Números complejos

I.1. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x^2 \in \mathbb{Q}$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 \in \mathbb{Q}$, entonces $x \in \mathbb{Q}$.

c) Si $x, y \in \mathbb{Q}$ entonces $x + y \in \mathbb{Q}$.

I.2. Da un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea racional y un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea irracional.

I.3. En cada uno de los siguientes apartados se dan dos números reales. Escribe (sin utilizar la calculadora) en el espacio que hay entre ellos el símbolo ($<$, $>$ o $=$) que corresponda.

a) -2 ..... -3 b) -2 ..... 3 c) π ..... $3{,}1416$ d) $-2(\pi - 4)$ ..... $1{,}5$

e) 3^2 ..... 2^3 f) 3^{-2} ..... 2^{-3} g) $(-3)^{-2}$ ..... $(-2)^{-3}$ h) $(-3)^2$ ..... $(-2)^3$

I.4. Marca el conjunto indicado en la recta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 0{,}5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 7\}$

I.5. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

a) $|x| = x + 5$ b) $|x| = x - 5$ c) $|2x - 6| < 4$

d) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ e) $|2x + 1| \leq 3$ f) $x^2 + 6 = |5x|$

g) $|3x - 1| > |2x - 4|$ h) $|\mathrm{sen}(x)| = \mathrm{sen}(x) + 1$

I.6. Encuentra los valores de x que cumplen las correspondientes ecuaciones e inecuaciones.

a) $|x - 4| = 9$ d) $|x - 4| + |x + 9| \geq 1$ g) $||x - 9| + |x|| < 0$

b) $|x - 4| \leq 9$ e) $|x - 4| + |x + 9| \leq 1$ h) $|x - 9| + |x| < 0$

c) $|x - 4| \geq 9$ f) $|x - 4| \cdot |x + 9| = 0$ i) $|x - 9| + |x| \leq 0$

I.7. Considera los intervalos $I_1 = [2, 5]$, $I_2 = (3, 7)$, $I_3 = (-1, 2]$, $I_4 = (1, 9), I_5 = [2, 18)$. Describe explícitamente los conjuntos de $\mathbb{R}$ dados por

a) $I_1 \cap I_2$ b) $I_1 \cup I_2$ c) $I_1 \cap I_3$ d) $I_4 \cap I_5$

e) $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ f) $I_1 \cup I_4$ g) $I_1 \cap I_4$ h) $I_2 \cap (I_1 \cup I_3)$

I.8. Escribe cada intervalo dado en forma de conjunto.

a) $(2, 2{,}5)$ b) $[2, 6]$ c) $(0, 0{,}0001]$ d) $(1, \infty)$

e) $(-1, -0{,}5)$ f) $[0, \pi)$ g) $(-\infty, 3]$ h) $[-e, \infty)$

I.9. Determina los mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si los hubiera, de los siguientes conjuntos.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\,, x^2 + 2x - 3 < 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 5x \leq 6\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\,, x^2 + 2x - 3 < 0\}$$

$$E = [1, 2) \cup \{12\} \qquad F = \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

I.10. Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Demuestra que

a) si A tiene máximo entonces tiene supremo y $\sup(A) = \max(A)$.

b) si A tiene supremo

i) y $\sup(A) \in A$ entonces A tiene máximo y $\max(A) = \sup(A)$.

ii) y $\sup(A) \notin A$ entonces A no tiene máximo.

Demuestra que ocurre lo mismo para el mínimo y el ínfimo.

I.11. Indica razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Para todo número real $x \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\sqrt{x^2} = x$.

b) No existe ningún subconjunto de números reales de manera que su supremo y su ínfimo coincidan.

c) La igualdad $|x + y| = |x| + |y|$ es cierta para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 4\}$.

e) Para todo x, $y \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x - y| > |x| + |y|$.

f) Todo conjunto no vacío de números reales, que tenga supremo, tiene máximo.

g) Todo conjunto no vacío de números reales, que tenga máximo, tiene supremo.

h) El supremo y el ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 3\}$ son, respectivamente, $\dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$ y $\dfrac{-\sqrt{13} - 1}{2}$.

i) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 8| \leq 2\} = [0, 10]$.

I.12. Realiza las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(3 - 2i) + (5 + 6i)$ b) $(6 - 5i) - (4 - 7i)$ c) $(3 + 4i)(2 - 5i)$

I.13. Representa gráficamente los siguientes números complejos.

a) $3 - 4i$ b) $-3i$ c) $2 + 3i$ d) $-6 - 2i$

I.14. Dados los números complejos $A = 1 - 2i$ y $B = 4 + i$, calcula $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ y $\dfrac{A}{B}$.

I.15. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente.

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) i d) $-i$ e) $-1 + i$ f)$-1 - i$

I.16. Dos conductores de $R_1 = 3 + 4i$ y $R_2 = 8 - 6i$ Ohmios están conectados en paralelo. Calcula R, sabiendo que $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

I.17. Escribe en forma trigonométrica los siguientes números complejos.

a) $1 + i$ b) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ d) -8 e) $1 + i\sqrt{3}$ f) i^{126}

I.18. Escribe en forma binómica el número complejo

a) de módulo 3 y de argumento principal $\frac{\pi}{3}$.

b) de módulo 3 y de argumento principal $-\frac{\pi}{6}$.

c) de módulo 7 y de argumento principal $\frac{2\pi}{3}$.

I.19. Considera los números complejos $z = 1 + i$ y $w = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\ \mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}))$. Calcula

a) $z + w$ b) z^4 c) $\frac{1}{z}$ d) zw e) $\frac{z}{w}$

I.20. Calcula las raíces cúbicas de $\frac{1-i}{1+i}$.

I.21. Calcula

a) $\frac{(1-i)^{20}}{(1+i)^{12}}$ b) $\sqrt[4]{8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i}$ c) $\sqrt{\frac{1}{3+4i}}$ d) $\frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$

I.22. Encuentra los vértices de un pentágono regular centrado en el origen, sabiendo que uno de ellos está en el punto $(0, 1)$

I.23. Halla las raíces de las siguientes ecuaciones y localízalas en el plano complejo.

a) $z^5 = -1$ b) $(1 + i)z^3 - 2i = 0$ c) $z^3 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $z^3 - i = 0$

I.24. Determina los números complejos de la forma $z = 1 + bi$ tales que $z^2\overline{z} = 1$ (Junio 2007).

I.25. Halla los números reales a y b para que el número $\frac{4b + 5ai}{5 + 4i}$ sea imaginario puro (esto es con parte real 0) y de módulo unidad.

I.26. Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado y represéntalos gráficamente. Halla la ecuación cuyas raíces sean las soluciones del problema.

I.27. Halla $a \in \mathbb{R}$ para que $\frac{2 + ai}{1 - 2i}$ sea un número real y calcula dicho cociente.

I.28. Halla el lugar geométrico de los números complejos que satisfacen las correspondientes igualdades y desigualdades.

a) $\left|\frac{z+5}{z-3}\right| = 2$ b) $|2z + 3| < 1$ c) $|z + 1| \leq |z - 1|$ d) $|z - i| = |z + i|$ e) $2 < |z| < 3$

I.29. Determina los números complejos que satisfacen las correspondientes condiciones.

a) $z(\overline{z} + 1)$ es real. b) $z(\overline{z} + 1)$ es imaginario puro.

I.30. Sea $z = r(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$. Halla $k = \frac{(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2)\cdots(z^n + \overline{z}^n)}{\cos(\theta)\cos(2\theta)\cdots\cos(n\theta)}$ en función de r.

I.31. La suma de dos números complejos es $2+3i$ y la parte real de uno de ellos es 1. Halla dichos números sabiendo que su cociente es un número complejo imaginario puro. (Septiembre 2008).