Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2009-2010
Relación de ejercicios del tema II: Funciones reales de variable real (límites, continuidad y derivadas)

II.1. Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Expresa su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

II.2. Un arquitecto técnico recibe el encargo de cerrar con un muro un terreno rectangular de 180000 m^2 adyacente a un río. Expresa con una función de una variable la longitud del muro, sabiendo que el lado del río no necesita ser cerrado.

II.3. Se quiere construir un depósito de 48 m^3 de capacidad que tenga forma ortoédrica y base cuadrada. Expresa con una función real de variable real, el coste de dicha construcción sabiendo que el precio de la chapa del fondo y de la tapa es de 18 euros por m^2 y el de las caras laterales es de 24 euros por m^2.

II.4. Un depósito de chapa está formado por un cilindro de radio r y altura h, cerrado en sus extremos por medio de dos semiesferas. La superficie total es 25 m^2. Expresa el volumen del depósito en función de r.

II.5. Un almacén rectangular debe tener 768 m^2 de superficie y debe estar dividido por una pared interior en dos zonas rectangulares. El coste de las paredes exteriores es de 150 euros por metro lineal y el de la pared interior de 100 euros por metro lineal. Expresa el coste de su construcción mediante una función real de variable real.

II.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |1 - x^2| + |x + 2|$. Expresa la función f como una función definida a trozos sin que aparezca el valor absoluto y dibuja la gráfica de f.

II.7. ¿Cuál es el dominio de las siguientes funciones?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(2-x)}\sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$ d) $f(x) = \ln\left((4-x^2)(x^2-1)\right)$

II.8. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, dibuja las gráficas de $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

II.9. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1 - x^2$, halla las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y determina sus dominios.

II.10. Si $f(x) = \dfrac{6x}{x^2-9}$ y $g(x) = \sqrt{3x}$, halla primero $(f \circ g)(12)$ y luego $(f \circ g)(x)$, dando su dominio.

II.11. Determina las funciones inversas de las siguientes funciones y verifica después que $f^{-1}(f(x)) = x$ y que $f(f^{-1}(x)) = x$.

a) $f(x) = \frac{x}{2}$ b) $f(x) = -\log_2 x$, $x > 0$.

c) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ d) $f(x) = a^{4x-2}$

II.12. Sean las funciones $f(x) = x^2 - x + 1$, definida para todo $x \geq \frac{1}{2}$, y $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \dfrac{3}{4}}$, definida si $x \geq \dfrac{3}{4}$. Demuestra que son inversas y resuelve la ecuación $f(x) = g(x)$.

II.13. ¿Para qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones?

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -3 \le x \le -1, \\ ax+b, & \text{si } -1 < x < 2, \\ 3, & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{a+3x-1}{3}, & \text{si } -3 \le x \le 0, \\ \dfrac{(a+1)x+2b}{x+1}, & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 5, & \text{si } 1 < x \le 4. \end{cases}$

¿Satisfacen las funciones anteriores las hipótesis del Teorema de Bolzano en los intervalos donde están definidas, para los valores a y b determinados previamente?

II.14. Demuestra que las ecuaciones siguientes tienen al menos una solución.

a) $x = \cos(x)$ b) $\ln\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x+1} = 0$ c) $x^3 - x = 2 + e^{x-1}$

d) $x^3 + 2x = 1$ e) $e^x = -x$

II.15. Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \in [-2, 0), \\ -x^2+2 & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

¿Existe algún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$?

II.16. Obtén la función derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{4x-3}{3x+1}$ b) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\right)$

c) $f(x) = 2x\operatorname{arctg}(2x) - \ln(\sqrt{1+4x^2})$ d) $f(x) = (1+x)^{\ln(1+x)}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\dfrac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$ f) $f(x) = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

g) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}(x)-1}}\right)$ h) $f(x) = (x^x)^x$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ j) $f(x) = x^{x^x}$

k) $f(x) = \left((\operatorname{tg}(x))^{\cos(x)}\right)^x$ l) $f(x) = x^3 3^{2x^2}$

m) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

II.17. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \;; \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & \text{si } x > 0, \\ e^x, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de g.

b) Halla $g \circ f$ en $[-1, 2]$. ¿Está acotada en dicho intervalo?

c) Prueba que existen $x_1, x_2 \in (1, 3)$ con $f(x_1) = \pi/2$ y $f(x_2) = 3\pi/2$. Deduce que existe un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que $(g \circ f)(c) = 0$.

d) Calcula $(g \circ f)'(x)$ en los puntos donde exista.

II.18. Demuestra que la ecuación $e^x = 1 - x$ tiene únicamente una solución real.

II.19. Estudia la derivabilidad y halla los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1|.$$

II.20. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - x^2 - 2x}{2}, & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, 0], \\ \dfrac{b}{x}, & \text{si } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

a) Determina a y b para que f sea continua en $[-\frac{1}{2}, 0]$ y derivable en $(-\frac{1}{2}, 0)$.

b) Para los valores de a y b determinados, contesta razonadamente las siguientes preguntas.

i) ¿Verifica f el teorema de Bolzano? ¿Y el teorema de Lagrange?

ii) ¿Tiene máximos y mínimos relativos?

iii) ¿En qué puntos es f cóncava hacia arriba y en qué puntos es cóncava hacia abajo?

II.21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}\ .$$

Calcula $(f^{-1})'(2)$.

II.22. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos(\alpha x)}{e^{\beta x} - \cos(\beta x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x)^{1/x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x + e^x + e^{2x})^{1/x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x - \sqrt{x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos(x)}{x^2 - 2x + 1}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}(x)^{\operatorname{tg}(x)}$

II.23. Calcula los máximos y mínimos absolutos en los intervalos que se indican de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } -2 \le x \le 1, \\ x + 3, & \text{si } 1 < x \le 2, \end{cases}$ en $[-2, 2]$.

b) $g(x) = x^2,\quad x \in [-1, 2]$.

c) $h(x) = x^3,\quad x \in [-1, 1]$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ en $[0, 2]$.

e) $g(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ en $[0, 4]$.

f) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ en $K = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le |x| \le 2\}$.

II.24. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 en un entorno del punto $a = 1$ de la función

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x(x + 1)}.$$

II.25. Calcula el desarrollo de Mac-Laurin de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$, si $x > -1$ b) $g(x) = \ln(3+2x)$, si $x > -\frac{3}{2}$

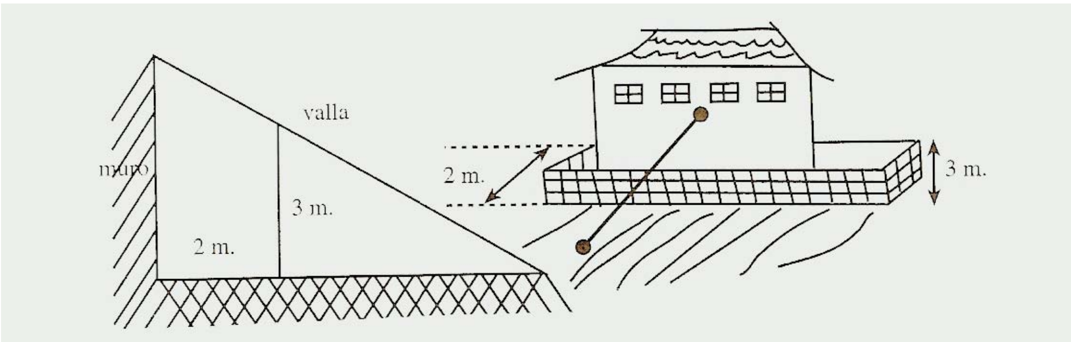
II.26. Un hilo homogéneo, bajo la acción de la gravedad, toma la forma de la gráfica de la función $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (catenaria). Demuestra que para valores pequeños de $|x|$ la forma que adopta dicho hilo se puede aproximar por la parábola $y = a + \dfrac{x^2}{2a}$.

II.27. Admitiendo que la resistencia a la flexión de una viga, con sección rectangular, es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura, halla las dimensiones de la viga de sección rectangular de máxima resistencia que puede fabricarse a partir de un madero cilíndrico de diámetro d.

II.28. Determina las dimensiones más económicas de una piscina de volumen 32 m^3, con fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.

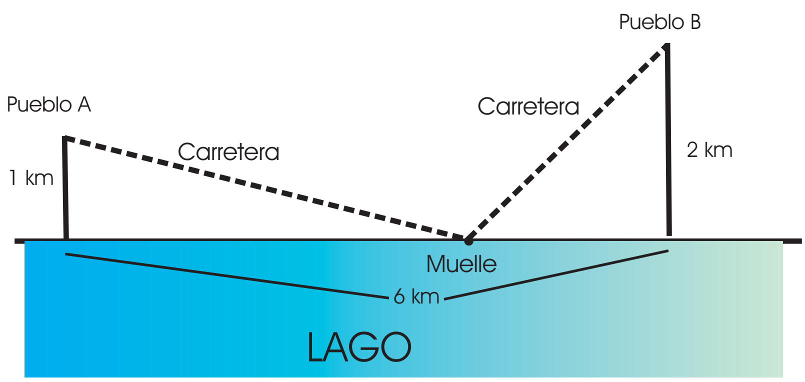
II.29. Un depósito de chapa está formado por un cilindro, de radio r y altura h, cerrado en sus extremos por medio de semiesferas. La superficie total del depósito es igual a 25 m^2. Halla r y h para que el volumen sea máximo.

II.30. Se pretende reforzar el muro de un edificio con una viga que debe pasar por encima de una valla de 3 m de altura. La valla se encuentra separada 2 m del edificio. ¿Cual es la mínima longitud de la viga?



II.31. Calcula el polinomio de Taylor de orden 4 en el punto $a = 0$ de la función $f(x) = \cosh(x)$ y utilízalo para aproximar $\cosh(1)$. (Diciembre 2007)

II.32. Dos pueblos (Pueblo A y Pueblo B) se localizan a la orilla de un lago. Sus distancias más cercanas a los puntos de la orilla son 1 km y 2 km respectivamente y, además, estos puntos de la orilla se encuentran a una distancia en línea recta de 6 km. Se quiere construir un muelle pesquero en la orilla del lago y unir dicho muelle con cada uno de los pueblos por medio de dos carreteras rectas. ¿Dónde debe localizarse el muelle para que el coste de construcción de las carreteras sea mínimo? (Diciembre 2007)



II.33. Sea la función $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$ si $x \in \mathbb{R}$.

a) Prueba que f tiene una única raíz real en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula la recta tangente en $\frac{\pi}{2}$ y verifica que dicha recta es tangente a la gráfica de f en otro punto del intervalo $[0, 3\pi]$. (Junio 2008)

II.34. ¿Qué puntos de la parábola $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto $(0, 2)$? (Junio 2008)

II.35. Calcula a, b, c y d para que el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el punto $a = 0$ de la función $f(x) = a\operatorname{sen}(bx) + c\cos(dx)$ sea $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$. ¿Es única la solución? (Junio 2007)

II.36. Sea $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2-5x+6} e^t \, dt & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ e^{x^2-5x+6} - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad y la continuidad de f.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de dicha función.

c) ¿Tiene extremos absolutos en el intervalo $[0, 5]$? Razona la respuesta y, en caso afirmativo, calcúlalos. (Junio 2007)

II.37. Una empresa distribuidora de materiales de construcción tiene plantas localizadas (en un sistema de coordenadas adecuado) en los puntos $A = (0, 1)$, $B = (0, -1)$ y $C = (3, 0)$. La empresa plantea construir un centro de distribución en el punto $P = (x, 0)$. ¿Qué valor de x minimizaría la suma de las distancias del punto P a los puntos A, B y C? (Junio 2007)