**Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2009-2010**
**Relación de ejercicios del tema III: Integral de Riemann. Cálculo de primitivas. Aplicaciones de la integral. Integrales impropias.**

III.1. Sabiendo que $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$, calcula

a) $\int_0^7 f(x)\,dx$ b) $\int_5^0 f(x)\,dx$ c) $\int_5^5 f(x)\,dx$

d) $\int_0^5 3f(x)\,dx$ e) $\int_0^5 (-4)f(x)\,dx$ f) $\int_7^0 f(x)\,dx$

III.2. Sabiendo que $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\,dx = -2$, calcula

a) $\int_2^6 (f(x)+g(x))\,dx$ b) $\int_2^6 (g(x)-f(x))\,dx$ c) $\int_2^6 2g(x)\,dx$

d) $\int_2^6 3f(x)\,dx$ e) $\int_2^6 (g(x)-4f(x))\,dx$ f) $\int_2^6 (2f(x)-4g(x))\,dx$

III.3. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $F(x) = \int_0^x (t^2-3t+2)\,dt$ b) $F(x) = \int_2^x (t^2-3t+2)\,dt$

c) $F(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2}+1)\,dt$ d) $F(x) = \int_2^{x^2} (e^{t^2}+1)\,dt$

e) $F(x) = \int_x^{-1} \mathrm{Ln}(t^2+1)\,dt$ f) $F(x) = \int_2^{x^2} t^3\,dt$

g) $F(x) = \int_0^{\mathrm{sen}(x)} \sqrt{t}\,dt$ h) $F(x) = \int_0^{x^3} \mathrm{sen}(t^2)\,dt$

i) $F(x) = \int_x^{x+2} (4t+1)\,dt$ j) $F(x) = \int_{\mathrm{Ln}(x)}^{e^x} (1+t)\,dt$

Si $f$ es una función continua en $\mathbb{R}$,

k) $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$ l) $F(x) = \int_0^x x^2 f(t)\,dt$

III.4. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) Si tenemos dos funciones continuas diferentes definidas sobre un mismo intervalo $[a,b]$ ¿pueden tener una misma primitiva?

b) ¿Son $P_1(x) = \ln(x^3/2)$ y $P_2(x) = 3\ln(x)$ primitivas de una misma función?

c) ¿Existe alguna función positiva definida en $[0,2]$ cuya derivada sea $(-x)$ y que valga 1 en $x=0$?

d) Sea $f(x)$ una función continua sobre el intervalo $[a,b]$ y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Si además sabemos que

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0,$$

d.1) ¿cuánto vale $F(a)$?
d.2) ¿cuánto vale $F(b)$?
d.3) ¿puede tomar un valor negativo la función $F(x)$ en algún punto?

III.5. Sea $f:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ una función continua que satisface la igualdad

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2} + x^2 + x\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Calcula $f(\frac{\pi}{4})$ y $f'(\frac{\pi}{4})$.

III.6. Calcula el polinomio de Taylor de grado tres en torno al punto $a=0$ de la función

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{arctg}(t)\ dt\,.$$

III.7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(0)=0$ y $f'(t)>0$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Determina los puntos donde $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2-5x+6} f(t)\ dt$ tiene extremos relativos, estudiando previamente su derivabilidad.

III.8. Calcula las siguientes integrales indefinidas y comprueba el resultado derivando.

*a)* $\displaystyle\int (x^3+2)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (x^{3/2}+2x+1)\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

*d)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$ *f)* $\displaystyle\int (x+1)(3x-2)dx$

*g)* $\displaystyle\int \frac{t^2+2}{t^2}dt$ *h)* $\displaystyle\int y^2\sqrt{y}\,dy$ *i)* $\displaystyle\int (t^2-\operatorname{sen}(t))\,dt$

*j)* $\displaystyle\int (\theta^2+\sec^2\theta)\,d\theta$ *k)* $\displaystyle\int \sec y(\tan y-\sec y)\,dy$ *l)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx$

*m)* $\displaystyle\int (2\operatorname{sen}x+3\cos x)\,dx$ *n)* $\displaystyle\int (1-\operatorname{cosec}(t)\operatorname{cotg}(t))\,dt$ *o)* $\displaystyle\int (\sec^2\theta-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

III.9. Calcula las siguientes integrales integrando por partes.

a) $\displaystyle\int x^3\ \cos(x^2)\ dx$ b) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}(5x)\ dx$ c) $\displaystyle\int x^3\ e^x dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{9-x^2}}\ dx$

e) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\ dx$ f) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)\ dx$ g) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\ dx$ h) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\ln(2+\cos(x))\ dx$ j) $\displaystyle\int (\operatorname{sen}(2x)\ln(\cos(x))\ dx$ k) $\displaystyle\int x^2\ e^{3x}\ dx$ l) $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sen}(2x)\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 x\ \operatorname{arcsen}(x)\ dx$ n) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx$ o) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\ dx$ p) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(x)\ dx$

III.10. Calcula las siguientes integrales usando la ayuda correspondiente.

*a)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } x=t^6}$

*b)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}}\,dx$

*c)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^3}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } x=t^6}$

*d)* $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$

*e)* $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } \frac{1-x}{1+x}=t}$

*f)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t=x+1}$

*g)* $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx$

*h)* $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

*i)* $\displaystyle\int \frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

*j)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,(2+\sqrt[3]{x})^3\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t^3=x}$

*k)* $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(2+3\sqrt[4]{x})^{-1/3}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t^4=x}$

*l)* $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } \sqrt{x^2+3}=x+t}$

*m)* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t=e^x}$

*n)* $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t=\ln(x)}$

*o)* $\displaystyle\int x\,\operatorname{arc\,tg}(x)\,dx$; $\boxed{\text{por partes}}$

*p)* $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-x^2}\,dx$

*q)* $\displaystyle\int \cos(\ln(x))\,dx$; $\boxed{\text{por partes (cíclica)}}$

*r)* $\displaystyle\int \ln(x^2)\,dx$; $\boxed{\text{por partes}}$

*s)* $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$

*t)* $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$; $\boxed{\text{cambio } t=x^4}$

III.11. Verifica el cambio de variable propuesto y calcula las siguientes integrales usando dicho cambio.

$$\boxed{\text{cambio:}\quad u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{sen}(x)=\frac{2u}{1+u^2},}\ \boxed{\cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2},}\ \boxed{dx=\frac{2\,du}{1+u^2}.}$$

*a)* $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}\,dx$

*b)* $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{3+2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$

*c)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

*d)* $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx$

III.12. Calcula las siguientes integrales racionales.

*a)* $\displaystyle\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2-2x+3)}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

*d)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$ *e)* $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{4x^3+8x}{x^2+2}\,dx$

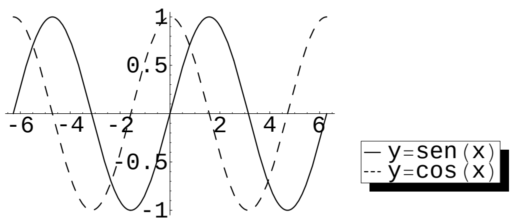
*g)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+4x^3-x^2+5x+1}{x^5+x^4+x^3-x^2-2}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1))}\,dx$

III.13. Para calcular la integral indefinida $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$, Paco la resuelve por el cambio de variable $t=\operatorname{sen}(x)$, con lo que obtiene $\operatorname{sen}^2(x)/2+C$ y Rosa hace el cambio $t=\cos(x)$ y llega a $-\cos^2(x)/2+C$.

Con estos resultados tan distintos y, si tú fueras el profesor, ¿qué nota le pondrías a cada uno? Justifícalo.

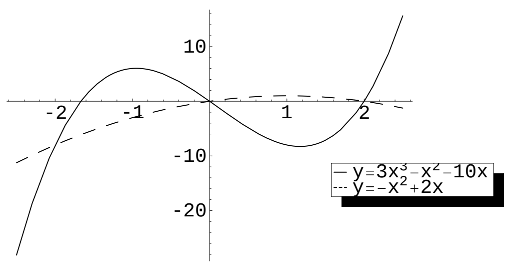
III.14. Calcula el área de la región acotada por las gráficas de $y=x^2+2$, $y=-x$, $x=0$ y $x=1$.

III.15. Las gráficas de las funciones seno y coseno se cortan infinitas veces, encerrando regiones de áreas iguales. Calcula el área de una de esas regiones.




III.16. Calcula el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones

$f(x)=3x^3-x^2-10x$ y $g(x)=-x^2+2x$.




III.17. Calcula el área limitada por las gráficas de $y=x^2$ e $y=2-x^2$ para $0\le x\le 2$.

III.18. Calcula el área de la región acotada por las gráficas de $x=y^2$ y $x=2-y^2$.

III.19. Halla el área limitada por la curva $y=xe^{-x^2}$ y el eje $OX$ entre las abcisas $x=0$ y $x=x_0$, donde $x_0$ es el valor de la abcisa en que se alcanza el valor máximo de la curva.

III.20. Calcula la longitud de arco de la gráfica de $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ en el intervalo $[\frac{1}{2},2]$.

III.21. Calcula la longitud de arco de la gráfica de $y=\ln(\cos(x))$ entre $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$.

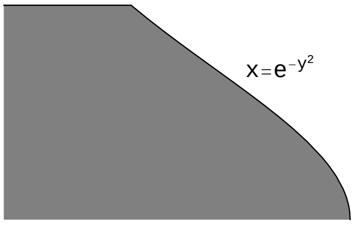
III.22. Calcula la longitud de arco de la curva $x=\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{4y}$ desde $y=1$ hasta $y=3$.

III.23. Calcula el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$, en torno al eje $OX$.

III.24. Calcula el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, en torno al eje $OX$.

III.25. Calcula el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, en torno al eje $OY$.

III.26. Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar, en torno al eje $OX$, la región acotada por la gráfica de $x = e^{-y^2}$ y el eje $OY$ cuando $0 \leq y \leq 1$.



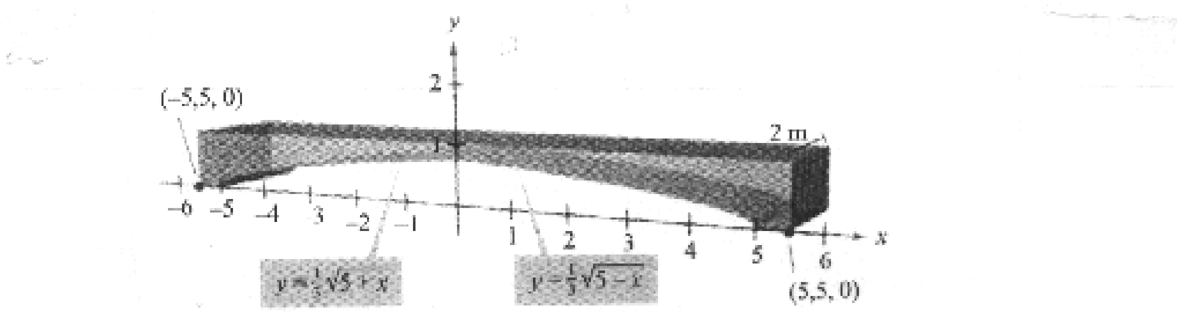

III.27. Calcula el volumen del sólido generado al girar, en torno al eje $OY$, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

III.28. Halla el volumen del sólido obtenido al girar la superficie plana determinada por las curvas $y = x - 4$ y $x = -y^2 + 4$ alrededor del eje $OY$.

III.29. Halla el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje $OY$ el triángulo de vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(4, 5)$.

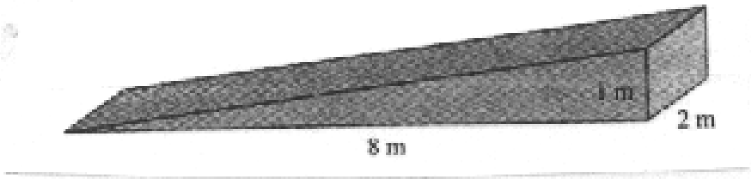
III.30. Determina el parámetro $a$ para que el área de la superficie de revolución generada por la curva $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, a]$, sea igual al de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$.

III.31. Una de las vigas de cemento empleadas en un edificio tiene la forma y dimensiones, en metros, indicadas en la siguiente figura.




a) Halla el área de la cara adosada al sistema de coordenadas.
b) Calcula el volumen de cemento de la viga.
c) Un metro cúbico de cemento pesa 2000 kg. ¿Cuanto pesa la viga?

III.32. Calcula el volumen de cemento de la rampa de la figura siguiente, cuyas secciones son triángulos rectángulos.



III.33. Calcula las siguientes integrales impropias.

*a)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx,$

*b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x)\, dx.$

III.34. Razona la veracidad o falsedad de la siguiente igualdad.

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}\,.$$

III.35. Razona si las integrales siguientes son impropias o no.

a) $\displaystyle\int_0^2 x^{2/5}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2/5}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 x^{-2/5}\, dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2/5}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3}{x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x}\, dx$ g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3}{x}\, dx$ h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x}\, dx$

III.36. Halla el valor de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x}$ d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$ f) $\displaystyle\int_1^\infty (1-x)e^{-x}\, dx$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$

i) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$ j) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-2x}\, dx$ k) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x}\, dx$ l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\, dx$ o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

q) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-2}\, dx$ r) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\, dx$ s) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ t) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$

III.37. Se llama **trompeta de Gabriel** al sólido de revolución engendrado por la región no acotada comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$, y el eje $OX$ al girar en torno al eje $OX$. Probar que este sólido tiene volumen finito y área superficial infinita.