Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2009-2010
Relación de ejercicios del tema IV: Introducción al espacio $\mathbb{R}^n$. Funciones reales de variable vectorial.

IV.1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x\sqrt{y}$ b) $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ c) $h(x,y) = \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

IV.2. Demuestra que no existen los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

IV.3. Calcula las funciones derivadas parciales de las funciones.

a) $f(x,y) = x^2\mathrm{sen}^2(x)$ b) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

c) $f(x,y) = e^{xy} + \frac{1}{xy}$ d) $f(x,y) = \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$

IV.4. Halla el vector gradiente de las siguientes funciones en los puntos donde exista.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2\mathrm{sen}(xy)$ b) $g(x,y,z) = \ln(3x^2-y^2+z)$

IV.5. Determina la dirección respecto de la cual la derivada direccional, de $f(x,y,z) = xy^2+yz+z^2x^2$ en el punto $(1,2,-1)$, es máxima.

IV.6. Halla la derivada de f en el punto A en la dirección del vector $\overrightarrow{v}$ que se indica.

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1)$.
b) $f(x,y) = \cos(xy)$, $A = (2,\pi/4)$, $\overrightarrow{v} = (4,-1)$.
c) $f(x,y) = x^2+2xy-3y^2$, $A = (1/2,1/2)$, $\overrightarrow{v} = (\sqrt{3},1)$.
d) $f(x,y,y) = xy+yz+zx$, $A = (1,-1,2)$, $\overrightarrow{v} = (10,11,-2)$.

IV.7. *a)* Sean f y g dos funciones reales de variable real derivables en $\mathbb{R}$. Se define la función de dos variables $z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$ con $u = \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{y}{x}$. Calcula $xz_x(x,y) + yz_y(x,y)$.

b) Sabiendo que $f(1) = g(1)$ y que $f'(1) = g'(1)$, calcula la derivada direccional máxima de $z(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

IV.8. Sea la función $f(x,y) = x^3\cos(y) + y - 2$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calcula el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0,-1)$.
b) Halla el valor máximo de la derivada direccional de f en el punto $(1,0)$. Indica para qué vector se obtiene dicho valor.

IV.9. Halla la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2+y^2$ en el punto $A = (2,-1,5)$.

IV.10. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie dada por la ecuación $z = xe^{xy-2}$ en el punto $A = (2,1,2)$.

IV.11. Estudia los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = xye^{x+2y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3pxy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$, según los distintos valores de p.

IV.12. Los cursos de dos ríos (dentro de una región determinada) pueden representarse de manera aproximada por la recta $x - y - 2 = 0$ y la parábola $y = x^2$. Se pretende unir estos ríos por un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos hay que trazarlo?

IV.13. Calcula los puntos del primer octante $(x > 0, y > 0, z > 0)$ de la superficie $z = \dfrac{1}{xy}$ más cercanos al punto $(0,0,0)$.

IV.14. Entre los paralelepípedos de superficie S dada, halla el que tenga mayor volumen.

IV.15. Entre los paralelepípedos rectangulares de volumen V, halla aquel cuya superficie sea menor.

IV.16. Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Halla los máximos y mínimos absolutos de dicha función en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$.

IV.17. Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Halla los máximos y mínimos absolutos de dicha función en el conjunto $D = [0,1] \times [0,1]$.

IV.18. *a*) Halla la matriz jacobiana de la función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6).$$

b) Halla la matriz jacobiana en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x + y, e^{x+y}, \operatorname{sen}(x+y)).$$

IV.19. La ecuación $e^y = x^3 + 3y$ determina una función $y = y(x)$ en un entorno del punto $(1,0)$. Calcula $y'(x)$.

IV.20. La ecuación $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0$ determina una función $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1,-1)$. Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

IV.21. (Examen final de junio 2008) La cubierta de un edificio ha sido diseñada siguiendo la superficie $z = f(x,y)$ que viene dada en forma implícita por la ecuación $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2y + z + e^{yz} = 4$. Como parte de un estudio topográfico, se pide

a) obtener las funciones derivadas parciales de $z = f(x,y)$.

b) dado el punto $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right)$:

b.1.) comprobar que pertenece a la cubierta del edificio.

b.2.) hallar el valor de la derivada direccional en P según el vector $(2,1)$.

c) partiendo del punto $Q = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$, ¿en qué dirección debemos ascender por la cubierta para hacerlo lo más rápido posible?

IV.22. (Examen final de junio 2008) Dada la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$, determina la distancia mínima y la distancia máxima de los puntos de esta curva al punto $(0, 0)$.

IV.23. (Examen de septiembre 2008) ¿En qué dirección es igual a 0 la derivada direccional de $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y^2}$ en el punto $(1, 1)$?

IV.24. (Examen de septiembre 2008) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

a) ¿Tiene la función f extremos absolutos sobre el círculo $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$? Razona la respuesta.

b) En caso afirmativo, calcula los extremos absolutos de f sobre el círculo anterior.

IV.25. (Examen de diciembre 2008)

a) Concepto e interpretación geométrica de la derivada direccional de una función en un punto.

b) Halla a para que la derivada direccional de la función $f(x, y) = e^{ax+3y} \cos(x + y)$ en la dirección del vector $(1, 1)$ en el punto $(0, 0)$ sea $3\sqrt{2}$. Para el valor de a hallado indica la dirección de máximo crecimiento de f en dicho punto.

IV.26. (Examen de diciembre 2008) Un observatorio con planta cuadrada tiene una cúpula con forma de paraboloide. Introduciendo un sistema de referencia cartesiano, los vértices del cuadrado son

$$A = (3, 3, 0),\ B = (-3, 3, 0),\ C = (-3, -3, 0) \text{ y } D = (3, -3, 0).$$

Si el paraboloide es la gráfica de la función

$$f(x, y) = 9 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}y^2,$$

a) calcula el plano tangente y la recta normal a la cúpula anterior en el punto $(3, 3, f(3, 3))$.

b) calcula el volumen del observatorio.