DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas para Biología. 31 de Enero de 2003.

Nombre ____ **Grupo** ________

EJERCICIO 1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = -\mathrm{tg}(t)x + \cos(t)$$

i) Resuelve la ecuación homogénea asociada.

ii) Calcula la solución general de la ecuación completa.

iii) Encuentra la solución que cumple $x(0) = 1$.

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se verifica que:

   (a) $\frac{2^x}{2^{2x}} = 2^x$,
   (b) $4^x = 2^{2x}$,
   (c) $-e^x = \frac{1}{e^x}$,
   (d) $\ln(1+2x) = 1 + 2e^x$.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Considera la ecuación diferencial ordinaria

$$x' = x^2 + 2t + 1.$$

   Se verifica que

   (a) si $x(0) = 1$ entonces $x'(0) = 2$.
   (b) si $x(0) = 1$ entonces $x'(0) = 3$.
   (c) si $x(0) = 1$ entonces $x''(0) = 2$.
   (d) si $x(0) = 1$ entonces $x''(0) = 6$.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

3. El crecimiento de una determinada población se rige por la ley logística

$$P' = 3P(4 - P).$$

   (a) Si $P(0) = 3$, $P(t) \to 4$ cuando $t \to +\infty$.
   (b) Si $P(0) = 1$, $P(t) \to 3$ cuando $t \to +\infty$.
   (c) Si $P(0) = 3$, la población $P(t)$ es estrictamente decreciente.
   (d) Si $P(0) = 1$, la población $P(t)$ crece sin límite.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Sea $N(t)$ el número de bacterias que hay en un cultivo en el instante t. Se sabe que la rapidez con que varia $N(t)$ es proporcional al número de bacterias que hay en cada instante, es decir,

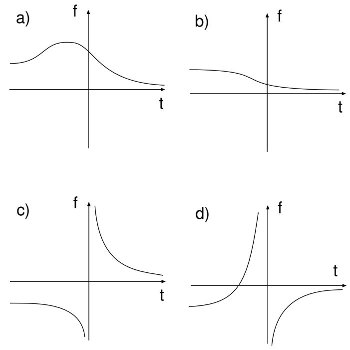
$$N'(t) = kN(t).$$

   Se ha observado que al cabo de 2 horas hay 1800 bacterias en el cultivo ($N(2) = 1800$) y al cabo de 4 horas, hay 600 ($N(4) = 600$). Entonces,

   (a) inicialmente en el cultivo había 5400 bacterias.
   (b) la constante de proporcionalidad k es positiva.
   (c) la población de bacterias crece ilimitadamente.
   (d) el número de bacterias en cualquier instante es $N(t) = N_0 e^{kt}$, siendo N_0 el número inicial de bacterias.
   (e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. Considera la función $f(t) = \frac{1}{e^t - 1}$. Identifica cuál de las siguientes gráficas corresponde al esbozo de la suya.



---

2. Las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales que se indica:
   (a) $x(t) = e^{t^2}$ de la ecuación $x' = t^2 x$.
   (b) $x(t) = e^{t^2}$ de la ecuación $x' = 2tx$.
   (c) $x(t) = e^t \cos(t), \;\; y(t) = e^t \mathrm{sen}(t)$ del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{array} \right.$
   (d) $x(t) = 0, \;\; y(t) = 0$ del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{array} \right.$
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Tres especies interaccionan según las leyes

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (3 - x + y - 2z)x, \\ y' = (4 + x - 2y)y, \\ z' = (5 - 3x + y - z)z. \end{array} \right.$$

   Se cumple que

   (a) las especies x e y tienen una relación de mutualismo.
   (b) las especies x y z tienen una relación de antagonismo.
   (c) las especies y y z tienen una relación de competencia.
   (d) $x \equiv 10$, $y \equiv 7$, $z \equiv 0$ es un punto de equilibrio semitrivial.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Dos especies que interaccionan según las leyes

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (11 - 2x - 3y)x \\ y' = (13 - 4x - 3y)y \end{array} \right.$$

   cumplen que

   (a) $x \equiv 3$, $y \equiv 1$ es un punto de equilibrio positivo (estado de coexistencia).
   (b) $x \equiv 1$, $y \equiv 3$ es un punto de equilibrio positivo (estado de coexistencia).
   (c) en ausencia de la especie y, la especie x tiende al valor $\frac{11}{2}$.
   (d) en ausencia de la especie y, la especie x tiende al valor $\frac{13}{4}$.
   (e) Ninguna de las anteriores.
