DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 17 de febrero de 2006 (Convocatoria Ordinaria de Febrero)

Apellidos y Nombre ____

DNI ________________________ **Grupo** __________

EJERCICIO 1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 3x(x-2)^2.$$

a) Calcula las soluciones constantes de la ecuación.

b) Calcula el resto de soluciones de la ecuación.

c) Calcula la solución que satisface la condición $x(2) = 1$.

d) Calcula los límites en $t = -\infty$ y $t = +\infty$ de la solución hallada en el apartado c).

e) Haz un esbozo de la gráfica de la solución calculada en el apartado c).

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. La función $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ es solución de

   a) $x' = \cos(t)$.
   b) $x' = -\cos(t)$.
   c) $(x')^2 + x^2 = 1$.
   d) $x' = \cos(x)$.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Se considera la ecuación diferencial $x' = f(x)$ con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in [a,b]$.

   a) f es una función creciente en $[a,b]$.
   b) f es una función decreciente en $[a,b]$.
   c) Si una solución $x(t)$ es creciente ($x'(t) > 0,\ \forall\, t$) entonces $x(t)$ es cóncava ($\cap$).
   d) Si una solución $x(t)$ es creciente ($x'(t) > 0,\ \forall\, t$) entonces $x(t)$ es convexa ($\cup$).
   e) Ninguna de las anteriores.

---

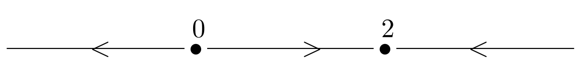
3. Se considera la ecuación diferencial
$$x' = 3x(x-2)^2.$$

   a) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(-1) > 2$ entonces tal solución es creciente.
   b) Si una solución $x(t)$ verifica que $0 < x(-1) < 2$ entonces tal solución es creciente.
   c) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(2) = 1$ entonces $x(t)$ tiene un punto de inflexión en $t = 2$.
   d) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(2) = \frac{2}{3}$ entonces $x(t)$ tiene un punto de inflexión en $t = 2$.
   e) Ninguna de las anteriores.

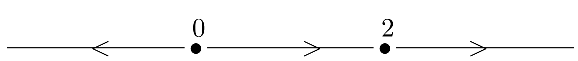
---

4. Se considera la ecuación diferencial
$$x' = 3x(x-2)^2.$$

   a) $x = 2$ es un punto de equilibrio inestable.
   b) $x = 2$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
   c) El retrato de fases viene dado por



   d) El retrato de fases viene dado por



   e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. El crecimiento de un determinado tipo de pez viene dado por el modelo de Von Bertalanffy: si $L(t)$ representa la longitud (en cm) del pez después de t meses de vida, entonces

$$L' = r(L_\infty - L).$$

Se considera que el tamaño máximo del pez (L_∞) es de 25 cm y que r es una constante positiva.

a) Si $L(0) = 5$ y $L(12) = 10$ entonces $L(24) = 20$.

b) Si $L(0) = 15$ entonces $L(t) = 15$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) Si $L(0) < 25$ entonces $L(t) < 25$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

d) Si $L(0) = 35$ entonces $L(t)$ es una función decreciente.

e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Se considera el modelo de interacción entre especies dado por el sistema

$$\begin{cases} x' = (3 - x - y)x, \\ y' = (3 + x - 2y)y. \end{cases}$$

a) El equilibrio positivo de la especie dada por x es 3 cuando está sola.

b) La especie dada por x tiene un crecimiento limitado en ausencia de la especie dada por y.

c) La especie dada por y representa a una presa.

d) La especie dada por y no puede sobrevivir cuando está sola.

e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera el modelo de interacción entre especies dado por el sistema

$$\begin{cases} x' = (3 - x - y - z)x, \\ y' = (3 + x - 2y - 2z)y, \\ z' = (1 - x + y - z)z. \end{cases}$$

a) Si $z = 0$ entonces x e y coexisten en el punto de equilibrio $(1, 2, 0)$.

b) Las tres especies coexisten en el punto de equilibrio $(1, 1, 1)$.

c) Hay una situación de competencia y dos de antagonismo.

d) Hay una situación de antagonismo y dos de competencia.

e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 6x + 2y + z = 5, \\ 9x - 3y + \alpha z = 9. \end{cases}$$

a) Si $\alpha \neq 3$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $\alpha \neq 3$ entonces la única solución del sistema viene dada por $\left(\dfrac{3(\alpha-4)}{4(\alpha-3)}, \dfrac{\alpha}{4(\alpha-3)}, \dfrac{12}{4(\alpha-3)}\right)$.

c) Si $\alpha = 3$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

d) Si $\alpha = 3$ entonces la única solución del sistema viene dada por $(1, 0, -1)$.

e) Ninguna de las anteriores.
