DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 6 de febrero de 2007 (Convocatoria Ordinaria de Febrero)

Apellidos y Nombre ____

DNI ______________________ **Grupo** __________

EJERCICIO 1. Tras semanas de insistencia por parte de sus padres, los mellizos Ana y Juan deciden realizar limpieza en su cuarto de estudio. Estando en ello, encuentran un papel con la siguiente tabla

1 de enero de 1998	*1.03 cm*
1 de enero de 2000	*3.60 cm*
1 de enero de 2001	*4.29 cm*

y la anotación *"Crecimiento de Rasputín, nuestro pez de colores"*. Intrigados por el tamaño que habría alcanzado Rasputín (de no haber sufrido un desafortunado incidente con el gato Nicolás), consultan Internet y averiguan que el crecimiento de este tipo de peces (cuando el tiempo se mide en años) responde al modelo de Von Bertalanffy dado por:

$$L'(t) = 0.4(L_\infty - L(t)).$$

Dispuestos a aplicar lo aprendido en su primer año de estudios de Biología, deciden hacer las cuentas. Para ello proceden del siguiente modo:

a) Resuelven la ecuación.

b) A partir de los dos primeros datos de la tabla, determinan los parámetros de la familia de soluciones (asumiendo que el 1 de enero de 1998 se corresponde con t=0).

c) Con el tercer dato de la tabla confirman el resultado obtenido en el apartado anterior.

d) Determinan la longitud máxima que habría alcanzado Rasputín.

Repite el proceso seguido por Ana y Juan.

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. La función $x(t) = t^2$, $t > 0$, es solución de
   (a) $x' = x^2$.
   (b) $x' = 2x$.
   (c) $x' = 2\sqrt{x}$.
   (d) $x' = \frac{2x}{t}$.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

2. La solución del problema de valores iniciales

$$x' = 3x - 3, \qquad x(0) = 4,$$

   (a) es $x(t) = 1 + 3e^{3t}$.
   (b) es $x(t) = 5e^{3t} - 1$.
   (c) satisface que $x''(t) = 3$.
   (d) satisface que $x''(t) = 9x(t) - 9$.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 3(x + 1)(x - 5).$$

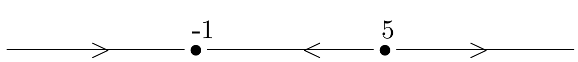
   (a) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(-1) > 5$ entonces tal solución es creciente.
   (b) Si una solución $x(t)$ verifica que $-1 < x(-1) < 0$ entonces tal solución es decreciente.
   (c) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(6) = 2$ entonces $x'(6) = 0$.
   (d) Si una solución $x(t)$ verifica que $x(6) = 2$ entonces $x'(6) = -27$.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

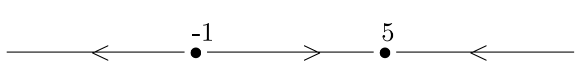
4. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 3(x + 1)(x - 5).$$

   (a) La ecuación tiene tres puntos de equilibrio.
   (b) $x = 5$ es un punto de equilibrio inestable.
   (c) El retrato de fases viene dado por



   (d) El retrato de fases viene dado por



   (e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. La población, $P(t)$, de una determinada especie se ajusta a la ley

$$P' = 6P(2 - \ln P).$$

   (a) Si $P(0) = 3$ la población crece.
   (b) La población límite es 2.
   (c) La población límite es e^2.
   (d) $P(t) = e^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución constante.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Tres especies interaccionan según las leyes

$$\begin{cases} x' = (1 - x - 2y + z)x, \\ y' = (1 + 2x - y - z)y, \\ z' = (1 - x + 2y - z)z. \end{cases}$$

   Se cumple que

   (a) en ausencia de la especie y, las especies x y z cooperan.
   (b) en ausencia de la especie y, las especies x y z alcanzan el equilibrio en el punto $(1, 1)$.
   (c) $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ es un punto de equilibrio positivo (estado de coexistencia) del sistema.
   (d) el sistema no tiene puntos de equilibrio positivos.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Dos especies que interaccionan según las leyes

$$\begin{cases} x' = (5 - 2x - y)x \\ y' = (4 - x - 2y)y \end{cases}$$

   cumplen que

   (a) $x \equiv 2$, $y \equiv 1$ es un punto de equilibrio positivo (estado de coexistencia).
   (b) $x \equiv 1$, $y \equiv 2$ es un punto de equilibrio positivo (estado de coexistencia).
   (c) en ausencia de la especie x, la especie y tiende al valor 5.
   (d) en ausencia de la especie x, la especie y tiende al valor 2.
   (e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 0, \\ 8x + 10y + \alpha^2 z = \alpha. \end{cases}$$

   (a) Si $\alpha \neq 4$ y $\alpha \neq -4$ entonces la única solución del sistema viene dada por $\left(\dfrac{3\alpha + 10}{\alpha + 4}, -2, \dfrac{1}{\alpha + 4}\right)$.
   (b) Si $\alpha \neq 4$ y $\alpha \neq -4$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
   (c) Si $\alpha = -4$ entonces el sistema no tiene soluciones.
   (d) Si $\alpha = 4$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
   (e) Ninguna de las anteriores.
