DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 8 de febrero de 2008. Examen final.

Nombre ____ **Grupo** __________

EJERCICIO 1. Se desea construir un modelo para el crecimiento de un ornitorrinco. Para ello, hace 10 días se inició un experimento en el que se han obtenido los siguientes resultados (se ha excluido la cola del ornitorrinco en todas las mediciones):

- En el instante en que se inicia la observación (asume $t = 0$) la longitud es igual a 13'5 mm.
- Pasados 4 días, la longitud es igual a 21'1 mm.

Además, se sabe que la longitud máxima (esto es, la "capacidad de carga") es igual a 70 mm. A partir de toda esta información, se proponen los dos siguientes modelos de crecimiento:

a) modelo logístico o de Verhulst: $L'(t) = rL(t)\left(1 - \frac{L(t)}{K}\right)$;

b) modelo de von Bertalanffy: $L'(t) = r(K - L(t))$.

Se pide que

[7] 1. averigües el valor de r en cada uno de los modelos a partir de la información dada.

[3] 2. si hoy se ha medido una longitud igual 34'2 mm, determines cuál de los dos modelos propuestos se ajusta mejor a este nuevo dato.

Sugerencia: Recuerda que la familia de soluciones para el modelo logístico o de Verhulst es

$$L(t) = \frac{KAe^{rt}}{1 + Ae^{rt}}, \quad \forall t \in I,\ A \in \mathbb{R},$$

donde I es un intervalo adecuado. Recuerda también que la familia de soluciones para el modelo de von Bertalanffy es

$$L(t) = K + Ae^{-rt}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}.$$

Ornitorrinco adulto (Ornithorhynchus anatinus)

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. De una función $f(x)$ se sabe que $f(0) = 1$ y $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces

   a) $f(x)$ es creciente.
   b) $f(x)$ no tiene máximos relativos.
   c) $f''(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   d) $f(1) > 1$.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Se considera la función $h(t) = t^2 + 5$. Entonces

   a) $h''(t)$ es una función constante.
   b) $h(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x''(t) = 2$.
   c) $h(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x'(t) = \dfrac{2t}{t^2+5}x(t)$.
   d) $h(-10) = 105$.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera la ecuación diferencial $x' = x^2$. Entonces

   a) $x'' = 2x$.
   b) $x'' = 2x^3$.
   c) $x'(0) = 9$ si $x(0) = 3$.
   d) $x''(0) = 6$ si $x(0) = 3$.
   e) Ninguna de las anteriores.

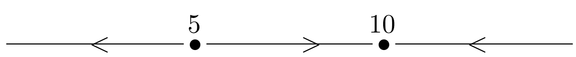
---

4. Sea $x(t)$ la solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = 0'2x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{5}\right), \ x(0) = 10.$$

   Entonces

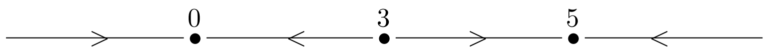
   a) x vale 218 en $t = 0$.
   b) la capacidad de carga para el modelo es igual a $0'2$.
   c) el retrato de fases de la ecuación es



   d) $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
   e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. Se considera el retrato de fases



Entonces

a) $x' = x(3-x)(x-5)$ es una posible ecuación diferencial para dicho retrato.

b) $x' = x^2(3-x)^2(x-5)^2$ es una posible ecuación diferencial para dicho retrato.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 5$ si $x(t)$ es una función coherente con el retrato y tal que $x(0) = 4$.

d) $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 3$ si $x(t)$ es una función coherente con el retrato y tal que $x(0) = 2$.

e) Ninguna de las anteriores.

---

2. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales modela la interacción de dos especies

$$\left\{\begin{array}{l} x' = (10 - 7x - 5y)x, \\ y' = (1 + 8x - 5y)y. \end{array}\right.$$

Entonces

a) $x \equiv 1$, $y \equiv 1$ es un estado de coexistencia.

b) la matriz $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ representa un sistema que hay que resolver para decidir si hay estados de coexistencia.

c) no hay estados de coexistencia.

d) la relación entre las especies es de mutualismo.

e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Dos especies interaccionan según el sistema de ecuaciones diferenciales del apartado anterior. Entonces

a) en ausencia de la especie x, la especie y crece ilimitadamente.

b) en ausencia de la especie x, la especie y tiende al valor 5.

c) en ausencia de la especie y, la especie x crece ilimitadamente.

d) en ausencia de la especie y, la especie x tiende al valor $\frac{10}{7}$.

e) Ninguna de las anteriores.

---

4. La matriz asociada a un cierto sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

a) para ningún valor de a el sistema es incompatible.

b) hay valores de a para los que el sistema es compatible indeterminado.

c) para $a = -1$ el sistema es incompatible.

d) la única solución del sistema viene dada por $\left(\dfrac{4a^2}{a^2+1}, 1, \dfrac{2}{a^2+1}\right)$.

e) Ninguna de las anteriores.
