DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 6 de febrero de 2009.

Nombre ______________________________ **Grupo** ______________

EJERCICIO 1. Se pretende proponer una ecuación diferencial que modele el crecimiento de los rosales "Ardlins" a partir de un esqueje. Para ello se parte de la ecuación diferencial

$$x'(t) = x(t)(x(t) - a)(b - x(t)),$$

donde a y b son dos números reales estrictamente positivos tales que b es mayor que a, es decir, $0 < a < b$. El objetivo de este ejercicio es encontrar los valores de a y b para que esta ecuación modele el crecimiento de la especie estudiada, partiendo de los datos experimentales recogidos.

i) Determina (en función de a y b) los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial. ¿Cuánto debe valer a si se sabe que 6 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial y que existe otro punto de equilibrio mayor que 6?

ii) Realiza (en función de a y b) un esbozo de todas las soluciones positivas de la ecuación diferencial.

(Indicación: No es necesario estudiar la convexidad en este apartado.)

iii) Para el valor de a encontrado en apartado i) se quiere determinar el valor de b. Sabiendo que, si sembramos esquejes de 9 cm de longitud (es decir, $x(0) = 9$), los rosales tienen un punto de inflexión en su crecimiento cuando alcanzan una altura de 12 cm, averigua de forma razonada el valor de b.

iv) Interpreta biológicamente la información que ofrece este modelo cuando se siembran esquejes de longitud menor que a.

Rosa "Ardlinds"

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. Un grupo de botánicos está estudiando el *Populus nigra*, comúnmente llamado álamo negro o chopo. Como quieren plantear un modelo matemático que ayude en la investigación, consideran la función $N(t)$ (derivable en todo $\mathbb{R}$) que indica el número de álamos en el instante t, donde el tiempo está medido en años.

   a) Si en el cuarto año (esto es, $t = 4$) el número de álamos alcanzó un mínimo relativo entonces $N'(4)$ debe ser igual a 0.
   b) Si en el cuarto año (esto es, $t = 4$) el número de álamos alcanzó un mínimo relativo entonces $N'(4)$ debe ser distinto de 0.
   c) Si se sabe que el número de álamos es siempre creciente entonces $N'(t)$ debe ser positiva para cualquier instante t.
   d) Si se talan álamos y no nacen (ni se plantan) más especímenes entonces $N'(t)$ debe ser positiva para cualquier instante t.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Un grupo de zoólogos estudia el *Danio rerio o Brachydanio rerio*, comúnmente conocido como pez cebra o danio cebrado. Para modelar su tamaño emplean el modelo de von Bertalanffy

$$L'(t) = 3(6 - L(t)),$$

   donde $L(t)$ mide la longitud media del pez cebra, en centímetros, en el instante t, con el tiempo medido en meses.

   a) La longitud de los peces cebra que miden 3 cm después de dos meses (esto es, $L(2) = 3$) se corresponde con una función siempre creciente.
   b) La longitud de los peces cebra que miden 8 cm después de dos meses (esto es, $L(2) = 8$) se corresponde con una función siempre decreciente.
   c) Si un pez cebra mide entre 7 y 9 cm en algún instante entonces crece hasta los 18 cm.
   d) Las soluciones de la ecuación diferencial no tienen puntos de inflexión.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Un matemático propone la siguiente ecuación diferencial a un grupo de biólogos porque, en su opinión, podría ser útil en la investigación sobre la propagación de un nuevo virus:

$$x'(t) = -(t - 2)x(t).$$

   a) $x(t) = Ae^{(t-2)^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, para A cualquier número real, es solución de la ecuación diferencial.
   b) $x(t) = Ae^{\frac{-(t-2)^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, para A cualquier número real, es solución de la ecuación diferencial.
   c) $x''(t) = -x(t) + 2 - t$.
   d) $x''(t) = (t^2 - 4t + 3)x(t)$.
   e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Un grupo de microbiólogos considera la ecuación de Gompertz

$$P'(t) = rP(t)\ln\left(\frac{150}{P(t)}\right),$$

   donde $r \in \mathbb{R}$, para estudiar el número de bacterias lácticas desarrolladas en emulsiones cárnicas cocidas (salchichas) envasadas al vacío.

   a) Si el número de bacterias es superior a 150 y $P(t)$ es decreciente entonces r debe ser positiva.
   b) Si $r > 0$ y $P(0) = 250$ entonces $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 150$.
   c) Si $r > 0$ y $P(0) = 50$ entonces $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 150$.
   d) Si $r > 0$ entonces $P = 150$ es un punto de equilibrio inestable.
   e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. Se considera el problema de valores iniciales

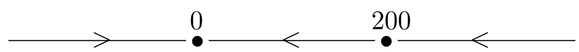
$$\begin{cases} x' = x(7-x), \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

Si $x(t)$ es una solución de este problema entonces

a) $x(7) = 0$.
b) $x'(0) = 12$.
c) $x''(0) = 12$.
d) $x''(7) = x'(7)(7 - 2x(7))$.
e) Ninguna de las anteriores.

---

2. La dinámica de una población viene dada por una ecuación diferencial con el siguiente retrato de fases



a) La ecuación $x' = x - 200$ se corresponde con el retrato de fases dado.
b) La ecuación $x' = x^2(x-200)^2$ se corresponde con el retrato de fases dado.
c) Ninguna ecuación diferencial puede tener el retrato de fases dado.
d) Si inicialmente la población es de 40 individuos entonces se extinguirá con el paso del tiempo.
e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera el siguiente modelo de interrelación entre especies

$$\begin{cases} x' = (1 + 4x - y)x, \\ y' = (1 - bx - y)y, \end{cases}$$

con $b \in \mathbb{R}$.

a) Hay puntos de equilibrio semitriviales cualesquiera que sean los valores de b.
b) Si $b = -4$ entonces existen infinitos estados de coexistencia.
c) Si $b = 4$ entonces no hay estado de coexistencia.
d) Si la relación es de competencia entonces no hay estados de coexistencia.
e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que permite el cálculo de los posibles estados de coexistencia de un sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza la interrelación entre tres especies

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + y - 4z & = & 5 \\ 2x + y - 3z & = & 3 \\ -ax + ay + 4z & = & a \end{array}\right\},$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un parámetro dependiente de las condiciones del hábitat.

a) La única solución del sistema es $(a+2, a-1, a)$ para cada valor de a.
b) El sistema tiene infinitas soluciones para cada valor de a.
c) Si $a = 0$ entonces el sistema no tiene solución.
d) Solamente hay estado de coexistencia si $a > 1$.
e) Ninguna de las anteriores.
