DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. Convocatoria extraordinaria de septiembre. 16 de septiembre de 2008.

Nombre ____ **Grupo** __________

<u>EJERCICIO 1.</u> Se considera la ecuación

$$x' = x - 9e^t. \tag{5}$$

i) Demuestra que, para cualquier número real C, la función

$$x(t) = (C - 9t)e^t \tag{6}$$

es solución de la ecuación dada.

ii) Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación (5) son de la forma (6), encuentra la solución que cumple la condición inicial $x(0) = 27$.

iii) Esboza la gráfica de la solución calculada en el apartado anterior. Para ello determina los ceros, los límites en $-\infty$ y $+\infty$, los extremos relativos y los puntos de inflexión.

iv) ¿Sería apropiado el problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} x' = x - 9e^t \\ x(0) = 27 \end{cases}$$

para modelar el tamaño de una población? Razona tu respuesta. (Se considera $t = 0$ el inicio de la observación de la población).

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. De una función $f(t)$ se sabe que $f'(t) = e^{3+t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces

   a) la función f es creciente en todo $\mathbb{R}$.

   b) la función f tiene un máximo en $t = 0$.

   c) la función f tiene un punto de inflexión en $t = 0$.

   d) la función f es $\cup$-convexa en todo $\mathbb{R}$.

   e) Ninguna de las anteriores.

---

2. El crecimiento de una determinada población de hongos se rige por el modelo de Malthus

$$N'(t) = \frac{1}{4} N(t),$$

   donde el tiempo se mide en horas. Se verifica que

   a) si $N(0) = 12$, entonces $N(t) = 12\, e^{t/3}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

   b) si $N(0) = 12$, entonces $N(t) = 12\, e^{t/4}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

   c) si $N(0) = 3$, la población tiende a extinguirse con el paso del tiempo.

   d) si $N(0) = 3$, la población crece ilimitadamente con el paso del tiempo.

   e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = x(4 - x).$$

   a) La solución que verifica $x(0) = 1$ tiene un cambio de convexidad.

   b) Todas las soluciones son crecientes.

   c) La solución que verifica $x(0) = 3$ también cumple que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

   d) $x(t) \equiv 2$ es una solución.

   e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Considera la ecuación diferencial

$$x' = 2t + 3x.$$

   a) Si $x(t)$ es una solución verificando $x(1) = 2$ entonces $x'(1) = 7$.

   b) Si $x(t)$ es una solución verificando $x(1) = 2$ entonces $x'(1) = 8$.

   c) Si $x(t)$ es una solución entonces $x'' = 2 + 6t + 9x$.

   d) Si $x(t)$ es una solución entonces $x'' \equiv 5$.

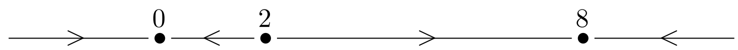
   e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

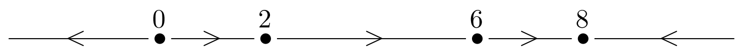
1. El crecimiento de una determinada población se rige por la ecuación

$$x' = 6x(x-2)(8-x).$$

a) El retrato de fases de la ecuación es



b) El retrato de fases de la ecuación es



c) Si $x(0) = 7$, la solución correspondiente toma valores cercanos a 8 cuando t tiende a $+\infty$.

d) Si $x(0) = 7$, la solución correspondiente es decreciente.

e) Ninguna de las anteriores.

---

2. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales modela la interacción entre dos especies

$$\begin{cases} x' = (3-x-y)x, \\ y' = (2+x-4y)y. \end{cases}$$

Entonces

a) la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ representa un sistema que hay que resolver para decidir si hay estados de coexistencia.

b) hay infinitos estados de coexistencia.

c) la relación entre las especies es de competencia.

d) $x \equiv 2, y \equiv 1$ es el único estado de coexistencia.

e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera el modelo de interacción entre especies dado por

$$\begin{cases} x' = (1-9x+2y)x, \\ y' = (3+x-y)y. \end{cases}$$

a) En ausencia de la especie modelada por x, la especie modelada por y no sobrevive.

b) En ausencia de la especie modelada por y, la especie modelada por x sobrevive.

c) Hay un equilibrio positivo en $(x,y) = (4,1)$.

d) Hay un equilibrio positivo en $(x,y) = (1,4)$.

e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2, \\ x & & & + & 2z & = & 4, \\ x & + & 4y & + & az & = & -a. \end{array} \right.$$

a) Si $a = 0$ entonces el sistema no tiene solución.

b) Si $a = 0$ entonces el sistema tiene una única solución.

c) Si $a = 2$ entonces el sistema no tiene solución.

d) Si $a = 1$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

e) Ninguna de las anteriores.
