DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 18 de septiembre de 2009.

Nombre ____ **Grupo** __________

EJERCICIO 1. Para determinar el número de individuos que hay en una población de palomas a lo largo del tiempo consideramos la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t)(1 - \frac{x(t)}{b}) \tag{1}$$

donde a y b son dos números reales con $b > 0$. Además $x(t)$ representa el número de millones de palomas de la población en el año t.

1. Sabiendo que $x(0) < b$, determina el signo de a para que la población sea creciente. ¿Cuál debería ser el signo de a si la población fuera decreciente?
2. Calcula los valores de a y b si se sabe que el número máximo admisible de individuos (capacidad de carga) de carga de la población de palomas es igual a 27 millones, $x(0) = 18$ y $x'(0) = 3$.
3. Para los valores de a y b hallados en el apartado 2, ¿cuál es la solución de la ecuación (1) que satisface la condición inicial $x(0) = 18$?
4. Realiza justificadamente un esbozo de la solución hallada en el apartado 3.

EJERCICIO 2. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

---

1. Un biólogo quiere estudiar el diámetro de los troncos de una determinada especie de árboles. Para ello considera una función $D(t)$ que representa el diámetro medio de los troncos en centímetros en el año t.

   a) Si $D'(t)$ es siempre positiva entonces el diámetro medio aumenta con el paso del tiempo.

   b) Si $D'(t)$ es siempre negativa entonces no sabemos si el diámetro medio aumenta o disminuye con el paso del tiempo.

   c) Si $D'(t) = 1$ para todo instante t entonces el diámetro medio es siempre constante.

   d) Si $D'(t) = 0$ para todo instante t entonces el diámetro medio es siempre constante.

   e) Ninguna de las anteriores.

---

2. Para estudiar la longitud media de un pez se considera la ecuación de von Bertalanffy

$$L'(t) = 3(10 - L(t)) \tag{2}$$

   donde $L(t)$ representa la longitud media en centímetros en el día t.

   a) Si $L(0) = 5$ entonces la longitud media máxima admisible es igual a 10 cm.

   b) Si $L(0) = 5$ entonces la longitud media máxima admisible es igual a 30 cm.

   c) $L = 10$ es un punto de equilibrio de la ecuación (2).

   d) $L(t) = 3 + e^{-10t}$ es una solución de la ecuación (2).

   e) Ninguna de las anteriores.

---

3. Se considera la ecuación diferencial

$$x'(t) = x(t) + 2\,t^2. \tag{3}$$

   Se verifica que

   a) $x''(t) = 1 + 4t$.

   b) $x''(t) = x(t) + 2\,t^2 + 4\,t$.

   c) si $x(3) = 0$ entonces $x'(3) = 18$.

   d) si $x(3) = 0$ entonces $x''(3) = 30$.

   e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Para estudiar el número de bacterias en un experimento se considera la ecuación de Malthus

$$P'(t) = rP(t), \quad r \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

   donde $P(t)$ representa el número de bacterias en miles en el minuto t.

   a) $P(t) = Ae^{rt}$, con A un número real positivo, es solución con sentido biológico de la ecuación (4).

   b) Si $P(0) = 1$ y $P(60) = 4$ entonces r debe ser un número positivo.

   c) Si r es negativo entonces $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$.

   d) Independientemente de que r sea positivo o negativo, $P''(t)$ es siempre mayor o igual que cero.

   e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

---

1. Sea $x(t)$ la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = 4\,x(16-x)(x-8), \\ x(1) = 32. \end{cases}$$

Entonces

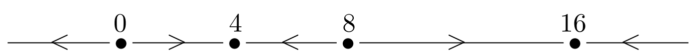
a) $x(5) < 32$.
b) $x(5) > 16$.
c) $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 16$.
d) $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 8$.
e) Ninguna de las anteriores.

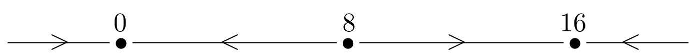
---

2. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 4\,x(16-x)(x-8).$$

Entonces:

a) El retrato de fases asociado es 

b) El retrato de fases asociado es 

c) Los puntos de equilibrios son $x = 0$, $x = 8$ y $x = 16$.
d) Los puntos de equilibrios son $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$ y $x = 16$.
e) Ninguna de las anteriores.

---

3. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales modela la interacción entre dos especies

$$\begin{cases} x' = (3+2x-y)x, \\ y' = (3-x-y)y. \end{cases}$$

a) La especie representada por y beneficia a la especie representada por x.
b) La especie representada por x beneficia a la especie representada por y.
c) La relación entre las especies es de competencia.
d) El sistema no tiene estados de coexistencia.
e) Ninguna de las anteriores.

---

4. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 3 \\ 2x-y+3z & = & 1 \\ 8x-4y+12z & = & a \end{array}\right\},$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un parámetro dependiente de las condiciones del hábitat.

a) El sistema es compatible determinado para cualquier valor de a.
b) Si a es distinto de 4 entonces el sistema es incompatible.
c) Si $a = 4$ entonces el sistema es compatible indeterminado.
d) Si $a = 4$ entonces $\{(-2-2\lambda, -5-\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ es la familia de soluciones del sistema.
e) Ninguna de las anteriores.
