Matemáticas - (Ldo. en Biología. Primer Curso)

Relación de ejercicios Nº 2. Curso 2007-2008.

1. *Determina cuáles de las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial que se indica:*

(a) $x(t) = e^{-t/2},\ 2x' + x = 0;$	*(b)* $x(t) = e^{-t^2/2},\ 2x' + x = 0;$
(c) $x(t) = \operatorname{sen} t,\ x^2 + (x')^2 = 1;$	*(d)* $y(t) = 5\operatorname{tg}(5t),\ y' = 25 + y^2;$
(e) $y(x) = \operatorname{sen} x,\ y' = xy;$	*(f)* $y(x) = 2x,\ y' - \frac{y}{x} = 0.$

2. *Comprueba que la familia de funciones* $x(t) = Ce^{-t/2}$ *es un conjunto de soluciones para la ecuación diferencial* $2x' + x = 0$. *¿Cuál de estas soluciones es la que vale 3 si* $t = 2$*?*

3. *Se sabe que la tasa de crecimiento de un determinado cultivo de bacterias es constante, de forma que si se denota por* $N(t)$ *el número de bacterias (en millones) que hay en el cultivo después de* t *minutos,* $N'(t) = rN(t)$ *para algún valor de* r *constante.*

   (a) Comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación dada es

   $$N(t) = Ae^{rt},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}.$$

   (b) Si en un principio se introducen 2.000.000 de bacterias en el cultivo (N(0)=2) y al cabo de 3 minutos el número de bacterias se ha duplicado (N(3)=4), calcula el tiempo que ha de transcurrir para tener 32.000.000 bacterias en el cultivo.

4. *La población de una determinada comunidad se rige por la ley de Malthus, es decir, si* $P(t)$ *es la población en el instante* t, $P'(t) = rP(t)$, *para algún valor de* r. *Si la población se duplica en 2 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?*

   (Sugerencia: comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación viene dado por la expresión $P(t) = Ae^{rt},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$*).*

5. *Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado en el que hay 100 estudiantes. Se supone que la rapidez de propagación del virus es proporcional al número de estudiantes contagiados y al de estudiantes que quedan por contagiar, es decir, si* $x(t)$ *es el número de estudiantes contagiados al cabo de* t *días,*

   $$x'(t) = rx(t)(100 - x(t)).$$

   (a) Comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación dada es (además de la función $x(t) = 100, \forall t \in \mathbb{R}$*)*

   $$x(t) = \frac{100Ae^{100rt}}{1 + Ae^{100rt}},\ \forall t \in I,\ A \in \mathbb{R},$$

   donde I *es un intervalo adecuado.*

   (b) Determina el número de estudiantes contagiados después de 6 días si a los 4 días hay 35 enfermos en el campus.

6. *Una población de células sigue la ley de Gompertz*

   $$P'(t) = rP(t)\ln\left(\frac{K}{P(t)}\right).$$

   Comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación dada es

   $$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}.$$

   ¿Es la función $P(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ *una solución de la ecuación dada?*

7. *Una población de delfines sigue la ley logística (modelo de Verhulst)*

   $$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}P\left(1 - \frac{P}{10}\right),$$

   donde $P = P(t)$ *representa la cantidad de dichos animales (en cientos) que hay en el instante* t. *Se sabe que en un principio había 800 delfines (*$P(0) = 8$*). Se pide:*

(a) *Comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación dada es (además de la función $P(t) = 10, \forall t \in \mathbb{R}$)*

$$P(t) = \frac{10Ae^{t/2}}{1 + Ae^{t/2}}, \ \forall t \in I, \ A \in \mathbb{R},$$

donde I es un intervalo adecuado.

(b) *¿Crecerá la población en el futuro? ¿Se extinguirá esta especie a largo plazo?*

Realiza de nuevo el apartado (b) suponiendo que en un principio había 1200 delfines (es decir, $P(0) = 12$).

8. *El crecimiento de una determinada especie de peces se rige por el modelo de Von Bertalanffy, esto es, si $L(t)$ indica el tamaño medio de los individuos (en centímetros) en el instante t (en meses), entonces*

$$L'(t) = r(L_\infty - L(t)),$$

donde L_∞ representa el tamaño medio máximo esperado.

(a) *Comprueba que el conjunto de soluciones de la ecuación dada es*

$$L(t) = L_\infty + Ae^{-rt}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ A \in \mathbb{R}.$$

(b) *Suponiendo que*

- *el tamaño medio máximo esperado de la especie es de 60 cm,*
- *el tamaño medio de nuestros peces es de 1 cm al comenzar el experimento,*
- *el tamaño medio al cabo de 1 mes ha aumentado en 9 cm,*

¿en que instante se alcanzará una longitud media de 42 cm?

9. *Ajusta las constantes para que la familia de funciones*

$$N(t) = Ke^{rt}$$

sea solución de la ecuación de Malthus

$$N'(t) = 2N(t).$$

¿Cuál de tales soluciones es la que vale 2 si $t = 1$?

10. *Ajusta las constantes para que la familia de funciones*

$$P(t) = \frac{AKe^{rt}}{1 + Ae^{rt}}$$

sea solución de la ecuación de Verhulst o (logística)

$$P'(t) = 2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{3}\right).$$

¿Cuál de tales soluciones verifica que $P(5) = 3$?

11. *Ajusta las constantes para que la familia de funciones*

$$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}}$$

sea solución de la ecuación de Gompertz

$$P'(t) = 3P(t)\ln\left(\frac{2}{P(t)}\right).$$

¿Cuál de tales soluciones es la que vale 1 si $t = 2$?

12. *Ajusta las constantes para que la familia de funciones*

$$L(t) = L_\infty + Ae^{-rt}$$

sea solución de la ecuación de Von Bertalanffy

$$L'(t) = 5(75 - L(t)).$$

¿Cuál de tales soluciones verifica que $L(3) = 5$?