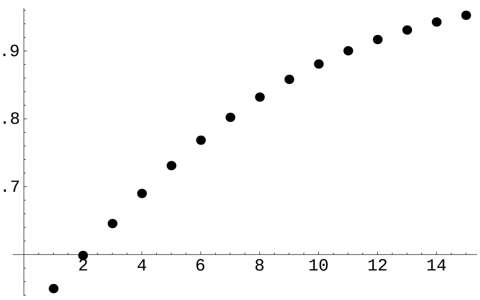
Matemáticas - (Ldo. en Biología. Primer Curso)

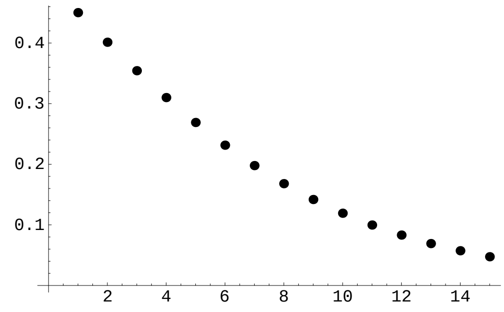
Relación de ejercicios N$^{\underline{o}}$ 3. Curso 2007-2008.

1. *Se consideran las siguientes nubes de puntos obtenidas en diversos experimentos.*

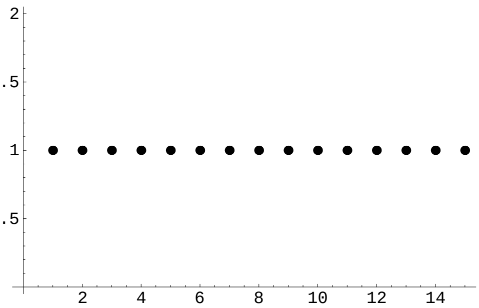
a)



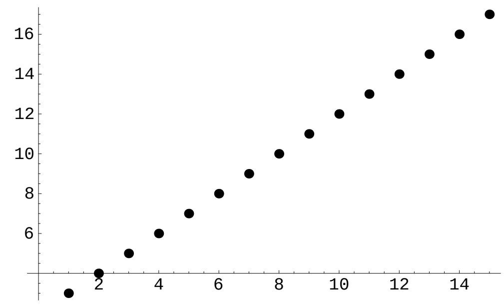
b)



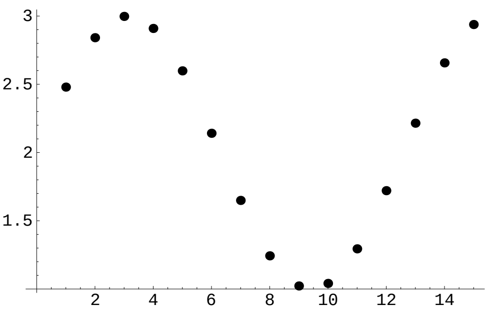
c)



d)



e)



Por otra parte, considera los siguientes modelos biológicos.

(a) $N'(t) = r$ *donde* r *es una constante.*

(b) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva no constante.*

(c) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función negativa no constante.*

(d) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva y negativa.*

Relaciona, justificando la elección, las gráficas con los modelos.

2. *Considera los siguientes problemas de valores iniciales:*

$$\textit{(i)}\quad x' = (x-1)(x-4),\;\; x(0)=6; \qquad \textit{ii)}\quad x' = (x-1)(x-4),\;\; x(0)=3;$$
$$\textit{(iii)}\quad x' = (x-1)(x-4),\;\; x(0)=0.$$

   (a) *Comprueba que (además de la función $x(t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$) la familia de funciones*

$$x(t) = \frac{4 - Ae^{3t}}{1 - Ae^{3t}},\ \forall t \in I,\ A \in \mathbb{R},$$

   donde I es un intervalo adecuado, es un conjunto de soluciones para la ecuación diferencial considerada en los problemas de valores iniciales.

   (b) *Resuelve cada uno de los problemas de valores iniciales propuestos.*

   (c) *A partir de un estudio cualitativo de la ecuación diferencial, realiza un esbozo de las gráficas de las soluciones obtenidas en el apartado anterior.*

   (d) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación diferencial considerada en los problemas de valores iniciales.*

3. *Considera el problema de valores iniciales*

$$x' = 2t(x-1)(x-4),\ x(0) = 3$$

   (a) *Comprueba que la función*

$$x(t) = \frac{8 + e^{3t^2}}{2 + e^{3t^2}},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

   es solución del problema propuesto.

   (b) *Intenta esbozar la gráfica de la solución dada.*

4. *Una población cumple*

$$\frac{dP}{dt} = 0'2P \ln\frac{4}{P},\ P(0) = 3.$$

   (a) *Haz un estudio cualitativo de la solución a partir de la ecuación diferencial.*

   (b) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación del problema de valores iniciales.*

   (c) *Esboza la gráfica de la solución del problema de valores iniciales.*

5. *Considera el problema de valores iniciales*

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+2),\ x(0) = 0.$$

   (a) *Haz un estudio cualitativo de la solución del problema de valores iniciales a partir de la ecuación diferencial.*

   (b) *Esboza la gráfica de la solución del problema de valores iniciales.*

   (c) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación del problema de valores iniciales.*

6. *Una generalización del modelo de Verhulst es el modelo de Beverton-Holt/Smith. La ecuación diferencial para este modelo es:*

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\frac{1}{1 + \alpha N(t)},$$

   donde r es el parámetro malthusiano, K es la capacidad de carga y α es un parámetro no negativo.

   Dibuja el retrato de fases y estudia la convexidad de las soluciones para el caso $r = 0'1$, $K = 8$ y $\alpha = 1$. Además, estudia la estabilidad de las soluciones constantes.