Matemáticas - (Ldo. en Biología. Primer Curso)

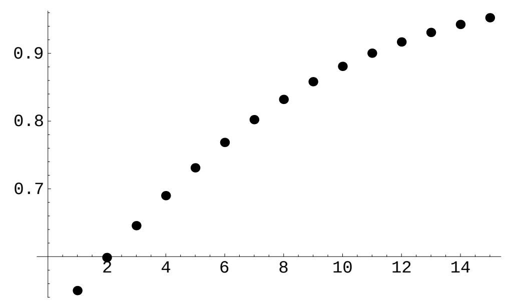
Relación de ejercicios Nº 5. Curso 2006-2007.

1. *El crecimiento de una determinada especie de peces se rige por el modelo de Von Bertalanffy, esto es, si $l(t)$ indica el tamaño medio de los individuos en el instante t (medido en meses), entonces*
$$l'(t) = r(l_\infty - l(t)),$$
donde l_∞ representa el tamaño medio máximo esperado. Suponiendo que el tamaño medio
   - *de la especie es de 60 cm,*
   - *de nuestros peces es de 1 cm al comenzar el experimento,*
   - *al cabo de 1 mes ha aumentado en 9 cm,*

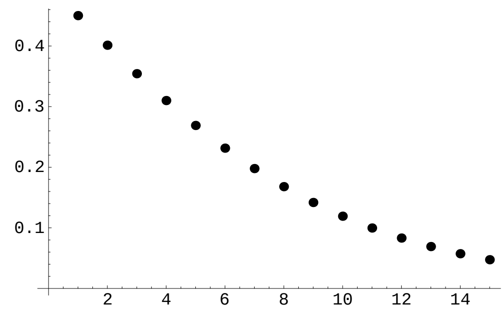
   ¿cuándo será de 42 cm?

2. *Se consideran las siguientes nubes de puntos obtenidas en diversos experimentos.*

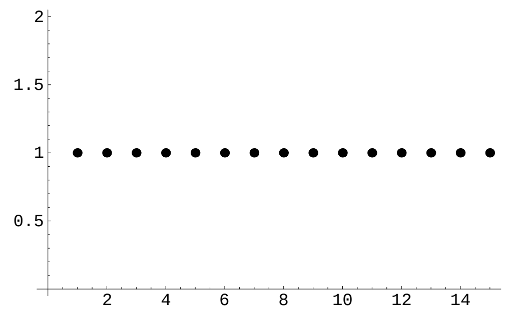
a)



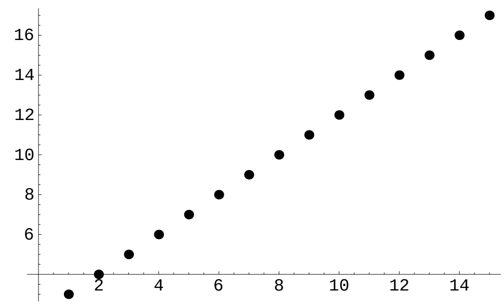
b)



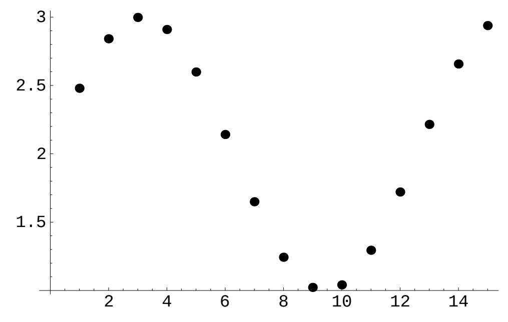
c)



d)



e)



Por otra parte, considera los siguientes modelos biológicos.

(a) $N'(t) = r$ *donde* r *es una constante.*

(b) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva.*

(c) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función negativa.*

(d) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva y negativa.*

Relaciona, justificando la elección, las gráficas con los modelos.

3. *Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:*

   (a) $x' = (x-1)(x-4), \ \ x(0) = 6;$ (b) $x' = (x-1)(x-4), \ \ x(0) = 3;$
   (c) $x' = (x-1)(x-4), \ \ x(0) = 0.$

   A partir de un estudio cualitativo de la ecuación diferencial, realiza un esbozo de las gráficas de las soluciones obtenidas.

4. *Considera la ecuación*
$$x' = t(x-1)(x-4).$$
   (a) *Resuelve la ecuación.*
   (b) *Calcula la solución,* $x(t)$*, que cumple* $x(0) = 3$.
   (c) *Intenta esbozar la gráfica de la solución.*

5. *Una población cumple*
$$\frac{dP}{dt} = 0'2P\ln\frac{4}{P}, \ P(0) = 3.$$
   (a) *Calcula* $P(t)$.
   (b) *Haz un estudio cualitativo de la solución a partir de la ecuación diferencial.*
   (c) *Esboza la gráfica de la solución.*

6. *Considera el problema de valores iniciales*
$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+2), \ x(0) = 0.$$
   (a) *Calcula* $x(t)$.
   (b) *Haz un estudio cualitativo de la solución a partir de la ecuación diferencial.*
   (c) *Esboza la gráfica de la solución.*

7. *Una generalización del modelo de Verhulst es el modelo de Beverton-Holt/Smith. La ecuación diferencial para este modelo es:*
$$N'(t) = rN(t)\big(1 - \frac{N(t)}{K}\big)\frac{1}{1+\alpha N(t)},$$
   donde r *es el parámetro malthusiano,* K *es la capacidad de carga y* α *es un parámetro no negativo.*

   Resuelve la ecuación, dibuja el retrato de fases y, además, estudia la convexidad de las soluciones para el caso $r = 0'1$, $K = 5$ *y* $\alpha = 1$.