Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 1 (T3)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 3 (tema 1): ejercicio obligatorio (curso 2020–2021)

Enunciado

a) Estudia el carácter del siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo, cuando sea posible, dependiendo de los valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 + ax_5 & = & 4+b \\ x_1 - x_2 + x_3 - ax_4 - ax_5 & = & 4-b \\ x_1 + x_3 + ax_5 & = & 4 \\ x_2 + x_3 - ax_5 & = & 5 \\ 2x_1 - ax_4 & = & 4-b \end{array}\right\}. \tag{1.1}$$

b) ¿Es posible obtener la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ para valores de a, b adecuados? En caso afirmativo, determina todos los casos posibles.

c) ¿Es posible obtener la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 0)$ para valores de a, b adecuados? En caso afirmativo, determina todos los casos posibles.

Resolución

a) Para discutir y resolver el sistema propuesto, usaremos notación matricial. Así, la matriz ampliada asociada al sistema propuesto es

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 1 & -1 & 1 & -a & -a & 4-b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -a & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -a & 0 & 4-b \end{array}\right).$$

Ahora aplicaremos eliminación gaussiana para obtener una matriz escalonada $(A'\,|\,b')$ equivalente y, posteriormente, poder discutir más fácilmente el carácter del sistema propuesto.[1]

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 1 & -1 & 1 & -a & -a & 4-b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -a & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -a & 0 & 4-b \end{array}\right) \xrightarrow[F_5-2F_1\to F_5]{\substack{F_2-F_1\to F_2 \\ F_3-F_1\to F_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & -2 & 0 & -2a & -2a & -2b \\ 0 & -1 & 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -a & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -3a & -2a & -4-3b \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2\to F_2}$$

[1] La notación que usaremos es la siguiente:

- $F_i \leftrightarrow F_j$ significa que intercambiamos las filas F_i y F_j.
- $F_i + \alpha F_j \to F_i$ significa que sumamos α veces la fila F_j a la fila F_i para obtener la nueva fila F_i. Análogamente, $F_i - \alpha F_j \to F_i$ significa que restamos α veces la fila F_j a la fila F_i para obtener la nueva fila F_i.
- $\alpha F_i \to F_i$ significa que multiplicamos por α la fila F_i para obtener la nueva fila F_i.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & -1 & 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -a & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -3a & -2a & -4-3b \end{array}\right) \xrightarrow[F_5+2F_2\to F_5]{\substack{F_3+F_2\to F_3 \\ F_4-F_2\to F_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & -2 & -a & 0 & -4-b \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -a & 0 & -4-b \end{array}\right) \xrightarrow{F_5+2F_3\to F_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3a & -4a & 6-3b \end{array}\right) \xrightarrow{F_4\leftrightarrow F_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & -3a & -4a & 6-3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right).$$

En este punto tenemos una matriz en la que, claramente, las tres primeras filas son no nulas independientemente de los valores que tomen los parámetros a, b. Sin embargo, que las filas cuarta y quinta sean nulas o no, sí dependerá de los valores que tomen los parámetros.

En primer lugar, observemos que los elementos $-3a, -4a, a$ son simultáneamente nulos o no nulos, según a sea igual a cero o distinto de cero. Por tanto, podemos afirmar que la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a \\ 0 & 0 & 0 & -3a & -4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

tendrá

- rango igual a tres cuando $a = 0$ (pues A será una matriz reducida con tres filas no nulas),
- rango igual a cinco cuando $a \neq 0$ (pues A será una matriz reducida con cinco filas no nulas).

Estudiemos cada caso por separado.

1) $a = 0$.

Por lo hecho hasta ahora, y si $a = 0$, entonces el sistema (1.1) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 4+b \\ x_2 & = & b \\ x_3 & = & 5-b \\ 0 & = & 6-3b \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{1.2}$$

El que este sistema tenga solución o no va a depender del término $6 - 3b$. En efecto, para que haya solución será necesario que se satisfaga la igualdad $6 - 3b = 0$. Pero,

$$6 - 3b = 0 \Leftrightarrow 6 = 3b \Leftrightarrow b = 2.$$

Por tanto, tenemos que estudiar dos subcasos:

1a) $a = 0$ y $b = 2$;

1b) $a = 0$ y $b \neq 2$.

1a) $a = 0$ y $b = 2$.

En esta situación, el sistema (1.1) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{1.3}$$

Es claro que este sistema tiene infinitas soluciones. En efecto, si bien x_1, x_2, x_3 tomarán valores fijos, se verifica que x_4, x_5 pueden tomar cualquier valor real. Por tanto, concluimos que, para $(a, b) = (0, 2)$, el sistema (1.1) es compatible indeterminado, siendo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, \alpha, \beta), \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

su conjunto de soluciones.[2]

1b) $a = 0$ y $b \neq 2$.

Ahora, el sistema (1.1) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \\ 0 & = & 6 - 3b \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\}, \tag{1.4}$$

donde $6 - 3b \neq 0$. Por tanto, la cuarta ecuación de este último sistema no tiene sentido y podemos concluir que el sistema (1.1) es incompatible.

2) $a \neq 0$.

Es claro que, para $a \neq 0$, podemos realizar las siguientes transformaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & -3a & -4a & 6-3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{a}F_5 \to F_5]{-\frac{1}{3a}F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & a & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & -2a & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{b-2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3+2aF_5 \to F_2 \\ F_4 - \frac{4}{3}F_5 \to F_4}]{\substack{F_1 - aF_5 \to F_1 \\ F_2 - aF_5 \to F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 4+b \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 5-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b-2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+aF_4 \to F_2]{\substack{F_1 - aF_4 \to F_1 \\ F_2 - aF_4 \to F_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b-2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Así, tenemos que el sistema (1.1) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & \frac{b-2}{a} \\ x_5 & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{1.5}$$

Por tanto, podemos afirmar que, para cualquier valor real a distinto de cero y para cualquier valor real b, el sistema (1.1) es compatible determinado y su única solución viene dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(1, 2, 3, \tfrac{b-2}{a}, 0\right).$$

[2] Puesto que los valores de x_2 y x_3 se deducen directamente de las ecuaciones segunda y tercera, para hallar el valor de x_1 basta con despejar en la primera ecuación.

Como conclusión de este primer apartado del ejercicio, tenemos que el sistema (1.1) es

- incompatible si $a = 0$ y $b \neq 2$;
- compatible indeterminado si $a = 0$ y $b = 2$, en cuyo caso el conjunto de soluciones viene dado por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, \alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- compatible determinado si $a \neq 0$, en cuya caso $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(1, 2, 3, \frac{b-2}{a}, 0\right)$ es la única solución (para cada posible par (a, b)).

b) A partir de lo hecho en el apartado anterior, es claro que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ no puede ser solución del sistema (1.1) si

- $a = 0$ y $b \neq 2$, pues en tal caso el sistema es incompatible;
- $a \neq 0$, pues en tal caso la solución del sistema siempre satisface que $x_5 = 0$.

Por otra parte, para $(a, b) = (0, 2)$, podemos afirmar que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ es solución del sistema sin más que considerar $\alpha = 4$ y $\beta = 5$ (en la expresión general del conjunto de soluciones de este caso).

Otro modo de resolver este apartado es viendo directamente que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ es solución del sistema (1.1). En efecto, sustituyendo en el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 1+2+3+a\cdot 4+a\cdot 5 &=& 4+b \\ 1-2+3-a\cdot 4-a\cdot 5 &=& 4-b \\ 1+3+a\cdot 5 &=& 4 \\ 2+3-a\cdot 5 &=& 5 \\ 2\cdot 1-a\cdot 4 &=& 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 6+9a &=& 4+b \\ 2-9a &=& 4-b \\ 4+5a &=& 4 \\ 5-5a &=& 5 \\ 2-4a &=& 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 9a-b &=& -2 \\ -9a+b &=& 2 \\ 5a &=& 0 \\ -5a &=& 0 \\ -4a+b &=& 2 \end{array}\right\},$$

lo cual tendrá sentido si, y solo si, $a = 0$ y $b = 2$.

c) A partir de lo hecho en el apartado *a*), es claro que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 0)$ no puede ser solución del sistema (1.1) si $a = 0$ y $b \neq 2$, pues en tal caso el sistema es incompatible.

Sin embargo,

- si $a \neq 0$, bastaría que $\frac{b-2}{a} = 4$ para obtener el resultado deseado, esto es, para cada par (a, b) tal que $a \neq 0$ y $\frac{b-2}{a} = 4$ se verifica que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 0)$ es la única solución del sistema correspondiente;
- si $(a, b) = (0, 2)$, entonces $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 0)$ es solución del sistema pues podemos tomar $\alpha = 4$ y $\beta = 0$ en la expresión general del conjunto de soluciones de este caso.

De nuevo podemos resolver este apartado viendo directamente que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 0)$ es solución del sistema (1.1). En efecto, sustituyendo en el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 1+2+3+a\cdot 4+a\cdot 0 &=& 4+b \\ 1-2+3-a\cdot 4-a\cdot 0 &=& 4-b \\ 1+3+a\cdot 0 &=& 4 \\ 2+3-a\cdot 0 &=& 5 \\ 2\cdot 1-a\cdot 4 &=& 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 6+4a &=& 4+b \\ 2-4a &=& 4-b \\ 4 &=& 4 \\ 5 &=& 5 \\ 2-4a &=& 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 4a-b &=& -2 \\ -4a+b &=& 2 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ -4a+b &=& 2 \end{array}\right\},$$

lo cual tendrá sentido si, y solo si, $4a - b = -2$. Pero esta última igualdad es cierta tanto para $(a, b) = (0, 2)$ como para $a \neq 0$ y $\frac{b-2}{a} = 4$.

Tarea 3 (tema 1): ejercicio optativo (curso 2020–2021)

Enunciado

a) Sea A una matriz cuadrada de orden n ($n \geq 1$) tal que $A^4 = 0$. Además, sea I la matriz identidad de orden n. ¿Es cierto que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A + A^2$? Justifica adecuadamente tu respuesta.

b) ¿Qué condición debe satisfacer A para que $I + A + A^2$ sea la inversa de $I - A + A^2$? Justifica tu respuesta. (Indicación: es posible proponer distintas condiciones).

Resolución

a) Para comprobar que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A + A^2$, realicemos su producto[3] y veamos si el resultado obtenido es la matriz identidad I.

$$\begin{aligned}(I + A + A^2)(I - A + A^2) &= I(I - A + A^2) + A(I - A + A^2) + A^2(I - A + A^2) = \\ &= I - A + A^2 + A - A^2 + A^3 + A^2 - A^3 + A^4 = I + A^2 + A^4.\end{aligned}$$

Ya que por hipótesis $A^4 = 0$, concluimos que $(I + A + A^2)(I - A + A^2) = I + A^2$. De esta forma, para que $I + A + A^2$ sea la inversa de $I - A + A^2$, es necesario que $A^2 = 0$, lo cual no es siempre cierto.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 \neq 0$ y $A^4 = 0$. Además,

$$(I + A + A^2)(I - A + A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en este caso, $I + A + A^2$ no es la inversa de $I - A + A^2$.

b) A partir de lo hecho en el apartado anterior, tenemos que

$$(I + A + A^2)(I - A + A^2) = (I - A + A^2)(I + A + A^2) = I + A^2 + A^4.$$

Por tanto, para que $I + A + A^2$ sea la inversa de $I - A + A^2$ es necesario que $A^2 + A^4 = 0$. Y para que se verifique esta condición es suficiente que

- directamente tengamos la igualdad $A^2 + A^4 = 0$ (sin que $A^2 = 0$ y $A^4 = 0$);
- se cumpla que $A^2 = 0$, en cuyo caso tendremos que $A^4 = 0$ y, de paso, que $A^2 + A^4 = 0$.

Aunque no se pide en el ejercicio, veamos, mediante dos ejemplos, que las dos condiciones dadas no corresponden a los mismos casos.

Ejemplo 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0;\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0;\ I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ I - A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, a partir de las matrices calculadas, es claro que $(I + A + A^2)(I - A + A^2) = I$ y que $(I - A + A^2)(I + A + A^2) = I$. Por consiguiente, $(I + A + A^2)$ es la inversa de $(I - A + A^2)$.

Ejemplo 2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A^2 = 0;\ A^4 = 0;\ I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ I - A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, es claro que $(I + A + A^2)(I - A + A^2) = I$ y que $(I - A + A^2)(I + A + A^2) = I$. Por tanto, $(I + A + A^2)$ es la inversa de $(I - A + A^2)$.

[3] Deberíamos realizar tanto el producto $(I + A + A^2)(I - A + A^2)$ como el producto $(I - A + A^2)(I + A + A^2)$. Sin embargo, obtendremos el mismo resultado en ambos casos: $I + A^2 + A^4$.