Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 2(1)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 2.11

Enunciado

Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, el conjunto $B = \{(1,1),(1,2)\}$.

a) Comprueba que B es base de $\mathbb{R}^2$.

b) Calcula las coordenadas respecto de B de los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,1)$.

c) ¿Cuáles son los vectores de $\mathbb{R}^2$ que tienen coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,3)$ respecto de B?

d) ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,1)$ respecto de la base $B' = \{(1,2),(1,1)\}$?

Resolución

a) Para comprobar que B es una base de $\mathbb{R}^2$, veamos que está compuesta por vectores linealmente independientes y que generan $\mathbb{R}^2$.

- A partir de la definición de independencia lineal, consideremos la igualdad

$$\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (0,0),$$

la cual lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

Es claro que este sistema es compatible determinado (¡compruébese!) y que la única solución es $\alpha = \beta = 0$. En consecuencia, $(1,1),(1,2)$ son vectores linealmente independientes.

- Sea (a,b) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Para ver que puede expresarse como combinación lineal de $(1,1)$ y $(1,2)$, consideremos la igualdad

$$\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (a,b),$$

que equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = a \\ \alpha + 2\beta = b \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

De nuevo es claro que este sistema es compatible determinado con solución dada por $\alpha = 2a-b$, $\beta = b-a$ (¡compruébese!). Por tanto, $\{(1,1),(1,2)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

Así, B es un conjunto de vectores linealmente independientes que genera $\mathbb{R}^2$, esto es, una base de $\mathbb{R}^2$.

b) A partir del sistema (2.2), tenemos que

- $(a,b) = (1,0) \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = -1 \Rightarrow (1,0) = (2,-1)_B$.
- $(a,b) = (0,1) \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 1 \Rightarrow (0,1) = (-1,1)_B$.
- $(a,b) = (-1,1) \Rightarrow \alpha = -3,\ \beta = 2 \Rightarrow (-1,1) = (-3,2)_B$.

Por cierto, obsérvese que $(-1,1) = -(1,0) + (0,1) = -(2,-1)_B + (-1,1)_B = (-3,2)_B$.

c) Es claro que:

- $(1,0)_B = 1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (1,2) = (1,1)$.
- $(0,1)_B = 0 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,2) = (1,2)$.
- $(2,3)_B = 2 \cdot (1,1) + 3 \cdot (1,2) = (5,8)$.

d) Ya que los vectores de B' son los mismos que los de B pero cambiados de orden, se sigue que

- $(1,0) = (2,-1)_B = 2 \cdot (1,1) - 1 \cdot (1,2) = -1 \cdot (1,2) + 2 \cdot (1,1) = (-1,2)_{B'}$.
- $(0,1) = (-1,1)_B = (1,-1)_{B'}$.
- $(-1,1) = (-3,2)_B = (2,-3)_{B'}$.

Ejercicio 2.14

Enunciado

En $\mathbb{R}^2$ consideramos las bases $B_1 = \{(1,1),(-1,4)\}$ y $B_2 = \{(3,0),(1,7)\}$.

a) Halla la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

b) Halla la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

c) Calcula las coordenadas en B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(2,3)$.

Resolución

Antes de resolver los apartados del ejercicio, algunos cálculos previos.

Puesto que B_1 es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier vector (x,y) puede expresarse como combinación lineal de sus vectores:

$$(x,y) = a_1(1,1) + b_1(-1,4), \tag{2.3}$$

de donde (a_1,b_1) son las coordenadas de (x,y) en la base B_1. O sea, $(x,y) = (a_1,b_1)_{B_1}$.

Igualmente, por ser B_2 una base, se verifica que $(x,y) = (a_2,b_2)_{B_2}$, esto es,

$$(x,y) = a_2(3,0) + b_2(1,7). \tag{2.4}$$

A partir de (2.3) y (2.4), se tiene la igualdad

$$a_1(1,1) + b_1(-1,4) = a_2(3,0) + b_2(1,7) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_1 + 4b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_2 + b_2 \\ 7b_2 \end{pmatrix},$$

que matricialmente corresponde a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Ya se puede resolver cada apartado.

a) La matriz de cambio de base de B_2 a B_1 es la matriz $C_{B_2 B_1}$ tal que

$$C_{B_2 B_1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, a partir de (2.5),

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, ya que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (¡hágase!), se concluye que

$$C_{B_2 B_1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Puesto que la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es la matriz $C_{B_1B_2}$ tal que

$$C_{B_1B_2}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix},$$

razonando como en el apartado anterior, se tiene que

$$C_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}3&1\\0&7\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}7&-1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}6&-11\\3&12\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-11/3\\1&4\end{pmatrix}.$$

c) A partir del apartado *a*),

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12&11\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}57\\12\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.18

Enunciado

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$$

y

$$W_2=\left\{(t,2t,3t)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\right\}.$$

a) Demuestra que $\mathbb{R}^3$ es la suma de ambos.

b) Calcula su intersección.

Resolución

a) Para determinar la suma de los subespacios vectoriales W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^3$, es adecuado calcular una base de cada subespacio.

En el caso de W_1, resolviendo su ecuación cartesiana:

$$x+y+z=0\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=-y-z,\\y&=\alpha,\\z&=\beta,\end{aligned}\right.\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=-\alpha-\beta,\\y&=\alpha,\\z&=\beta,\end{aligned}\right.\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=-\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

A partir de aquí, es claro que $(1,-1,0),(1,0,-1)$ generan todos los vectores de W_1 y, además, son linealmente independientes (¡compruébese esto último!). Por tanto, $B_1=\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ es una base de W_1.

Por otra parte, para W_2 se tiene que todos sus vectores son de la forma $(t,2t,3t)$, de donde,

$$\begin{pmatrix}t\\2t\\3t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Por tanto se puede concluir que $B_2=\{(1,2,3)\}$ es una base de W_2.

Puesto que $B=\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,2,3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (¡compruébese!), se verifica que, para cualquier vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, existen $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z)=a(1,-1,0)+b(1,0,-1)+c(1,2,3)=(a+b,-a,-b)+(c,2c,3c),$$

con $(a+b,-a,-b)\in W_1$ y $(c,2c,3c)\in W_2$. En consecuencia, $W_1+W_2=\mathbb{R}^3$.

b) Sea $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$. Entonces, por las definiciones de ambos subespacios:

- $x + y + z = 0$;
- $(x, y, z) = (t, 2t, 3t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $t + 2t + 3t = 6t = 0$, lo cual es posible si, y solo si, $t = 0$. Así, se concluye que $W_1 \cap W_2 = (0, 0, 0)$.

Conviene observar que, como $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ y $W_1 \cap W_2 = (0, 0, 0)$, entonces $\mathbb{R}^3$ es suma directa de W_1 y W_2, es decir, W_1 y W_2 son subespacios complementarios de $\mathbb{R}^3$.