Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 2(2)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 2.19

Enunciado

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, se considera el subespacio vectorial U generado por los vectores

$$\{(1,2,-1,1,0),(1,3,0,-1,1),(0,1,1,-2,1)\}.$$

Halla un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ que sea complementario de U.

Resolución

Antes de nada hay que comprobar si los vectores $(1,2,-1,1,0),(1,3,0,-1,1),(0,1,1,-2,1)$ son linealmente independientes. Para ello, sea la combinación lineal

$$a(1,2,-1,1,0)+b(1,3,0,-1,1)+c(0,1,1,-2,1)=(0,0,0,0),$$

que es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} a+b=0 \\ 2a+3b+c=0 \\ -a+c=0 \\ a-b-2c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo este sistema (¡hágase!), se tiene que

$$\left\{\begin{array}{c} a=\lambda, \\ b=-\lambda, \\ c=\lambda, \end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, tomando $\lambda=1$, se tiene que

$$(1,2,-1,1,0)-(1,3,0,-1,1)+(0,1,1,-2,1)=(0,0,0,0,0),$$

esto es, los tres vectores son linealmente independientes. En particular, se puede eliminar $(1,3,0,-1,1)$ pues

$$(1,3,0,-1,1)=(1,2,-1,1,0)+(0,1,1,-2,1).$$

Finalmente, $(1,2,-1,1,0),(0,1,1,-2,1)$ sí son un conjunto de vectores linealmente independientes (ninguno de los dos es múltiplo del otro) y, además, generan a U. Esto es, $B=\{(1,2,-1,1,0),(0,1,1,-2,1)\}$ es una base de U.

Para hallar un subespacio complementario de U en $\mathbb{R}^5$, basta con encontrar tres vectores $u_1,u_2,u_3\in\mathbb{R}^5$ tales que $\{(1,2,-1,1,0),(0,1,1,-2,1),u_1,u_2,u_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^5$. Por ejemplo, se puede tomar (¡compruébese!)

$$u_1=(0,0,1,0,0),\ u_2=(0,0,0,1,0),\ u_3=(0,0,0,0,1).$$

A partir de aquí,

$$U^c=L\big(\{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}\big)=\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5\mid x_1=0,\ x_2=0\big\}$$

es un subespacio complementario de U en $\mathbb{R}^5$.

Ejercicio 2.21

Enunciado

Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$: $(4,-5,7)$, $(3,-3,4)$, $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$.

a) Halla una base del subespacio vectorial $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ que generan dichos vectores.

b) Estudia si dicho subespacio coincide con el generado por los vectores $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$.

c) Determina unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de Y.

Resolución

a) Para calcular una base de $Y = L\big(\{(4,-5,7),(3,-3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}\big)$, hay que analizar la independencia de los vectores dados. Para ello se considera la combinación lineal

$$a(4,-5,7)+b(3,-3,4)+c(1,1,-2)+d(2,-1,1)=(0,0,0),$$

que es equivalente al sistema

$$\left.\begin{aligned} 4a+3b+c+2d&=0\\ -5a-3b+c-d&=0\\ 7a+4b-2c+d&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo este sistema (¡hágase!), se tiene que

$$\left\{\begin{aligned} a&=2\lambda+\mu,\\ b&=-3\lambda-2\mu,\\ c&=\lambda,\\ d&=\mu, \end{aligned}\right. \qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, tomando $\lambda=\mu=1$, se tiene que

$$3(4,-5,7)-5(3,-3,4)+(1,1,-2)+(2,-1,1)=(0,0,0),$$

esto es, los tres vectores son linealmente independientes. En particular, se puede eliminar $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$ pues

- $\lambda=1,\ \mu=0 \Rightarrow 2(4,-5,7)-3(3,-3,4)+(1,1,-2)=(0,0,0)\Rightarrow$
$$(1,1,-2)=-2(4,-5,7)+3(3,-3,4),$$
- $\lambda=0,\ \mu=1 \Rightarrow (4,-5,7)-2(3,-3,4)+(2,-1,1)=(0,0,0)\Rightarrow$
$$(2,-1,1)=-(4,-5,7)+2(3,-3,4).$$

Finalmente, $(4,-5,7),(3,-3,4)$ sí son vectores linealmente independientes (ninguno de los dos es múltiplo del otro) y, además, generan a Y. Para justificar esto último, si $v\in Y$ entonces existen $v_1,v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}$ tales que

$$v=v_1(4,-5,7)+v_2(3,-3,4)+v_3(1,1,-2)+v_4(2,-1,1),$$

de donde,

$$v=v_1(4,-5,7)+v_2(3,-3,4)+v_3\big(-2(4,-5,7)+3(3,-3,4)\big)+v_4\big(-(4,-5,7)+2(3,-3,4)\big)\Rightarrow$$

$$v=v_1-2v_3-v_4)(4,-5,7)+(v_2-5v_3+2v_4)(3,-3,4).$$

O sea, v se puede expresar como combinación lineal de $(4,-5,7)$ y $(3,-3,4)$.

Se concluye que $B=\{(4,-5,7),(3,-3,4)\}$ es una base de Y.

b) Por lo hecho en el apartado anterior, se sabe que Y tiene dimensión dos (es decir, es un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$).

Como $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$ son linealmente independientes (¿por qué?), se sabe que generan un plano vectorial Z de $\mathbb{R}^3$.

Por consiguiente, si $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$ pertenecen a Y, entonces se cumplirá que $Y = Z$.

Para ver si $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$ pertenecen a Y, bastará con comprobar si se verifican las igualdades

$$(1,-2,3) = a_1(4,-5,7) + b_1(3,-3,4),$$

$$(3,0,-1) = a_2(4,-5,7) + b_2(3,-3,4),$$

para ciertos $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Para hallar a_1, b_1, a_2, b_2 hay que resolver los sistemas (¡hágase!)

$$\left.\begin{array}{r} 4a_1 + 3b_1 = 1 \\ -5a_1 - 3b_1 = -2 \\ 7a_1 + 4b_1 = 3 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} 4a_2 + 3b_2 = 3 \\ -5a_2 - 3b_2 = 0 \\ 7a_2 + 4b_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Así, $(1,-2,3) = (4,-5,7) - (3,-3,4)$ y $(3,0,-1) = -3(4,-5,7) + 5(3,-3,4)$.

Se concluye que $Y = L\big(\{(1,-2,3),(3,0,-1)\}\big)$.

c) Puesto que $B = \{(4,-5,7),(3,-3,4)\}$ es una base de Y, se tiene que todo vector $(x,y,z) \in Y$ es de la forma

$$(x,y,z) = a(4,-5,7) + b(3,-3,4), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, Y viene dado por las ecuaciones parámetricas

$$\left\{\begin{array}{r} x = 4a + 3b, \\ y = -5a - 3b, \\ z = 7a + 4b, \end{array}\right. \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Para hallar ecuaciones cartesianas de Y, basta con determinar para cuáles valores de x, y, z es compatible el sistema lineal (con incógnitas a, b)

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 3b = x \\ -5a - 3b = y \\ 7a + 4b = z \end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

Esto es, para hallar ecuaciones cartesianas de Y se estudia qué vectores se pueden expresar como combinación lineal de $(4,-5,7)$ y $(3,-3,4)$. El citado estudio se puede llevar a cabo mediante eliminación gaussiana, tal como se ve a continuación usando notación matricial. Por cierto, ¡determínense las transformaciones que se han realizado!

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & x \\ -5 & -3 & y \\ 7 & 4 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & x \\ -1 & 0 & y+x \\ 7 & 4 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & y+x \\ 4 & 3 & x \\ 7 & 4 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 4 & 3 & x \\ 7 & 4 & z \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 0 & 3 & x-4(-y-x) \\ 0 & 4 & z-7(-y-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 0 & 3 & 5x+4y \\ 0 & 4 & 7x+7y+z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 0 & 1 & \frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 4 & 7x+7y+z \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 0 & 1 & \frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 0 & 7x+7y+z-4\left(\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y-x \\ 0 & 1 & \frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+z \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema (2.1) es compatible si y solo si $\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y + z = 0$. Quitando denominadores, se tiene que el subespacio vectorial Y (de $\mathbb{R}^3$) viene dado por la ecuación cartesiana

$$x + 5y + 3z = 0.$$

Ejercicio 2.21 (modo alternativo)

Enunciado

Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$: $(4,-5,7)$, $(3,-3,4)$, $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$.

a) Halla una base del subespacio vectorial $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ que generan dichos vectores.

b) Estudia si dicho subespacio coincide con el generado por los vectores $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$.

c) Determina unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de Y.

Resolución

a) Dados los vectores $(4,-5,7)$, $(3,-3,4)$, $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$, un modo diferente de estudiar su independencia lineal es considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y aplicar eliminación gaussiana por filas.

En efecto, al representar cada fila de la matriz A uno de los vectores dados, las transformaciones elementales (permitidas en eliminación gaussiana por filas) dan lugar a nuevos conjuntos de vectores que generan el mismo subespacio vectorial y que, por consiguiente, serán linealmente independientes si, y solo si, lo son los vectores originales. Conviene comentar que esta misma idea se aplicará, en el Tema 3, para calcular el núcleo y la imagen de una aplicación lineal entre espacios vectoriales.

En el caso considerado, se tiene que (¡determínense las transformaciones que se han realizado!)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 10 \\ 0 & -9 & 15 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -9 & 15 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, Y está generado por los vectores $(1,1,-2)$ y $\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$ (que claramente son linealmente independientes).

Aunque no es necesario, se puede comprobar fácilmente que los vectores $(4,-5,7)$, $(3,-3,4)$, $(1,1,-2)$ y $(2,-1,1)$ se expresan como combinación lineal de $(1,1,-2)$ y $\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$. En efecto,

- $(4,-5,7) = 4(1,1,-2) - 9\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$,
- $(3,-3,4) = 3(1,1,-2) - 6\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$,
- $(1,1,-2) = 1(1,1,-2) + 0\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$,
- $(2,-1,1) = 2(1,1,-2) - 3\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$.

b) Este apartado se realiza del mismo modo que en la versión anterior tomando en el subespacio vectorial Y la base $B' = \left\{(1,1,-2), \left(0,1,-\frac{5}{3}\right)\right\}$.

Puesto que $(1,-2,3)$ y $(3,0,-1)$ son vectores linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro) y, ademas,

- $(1,-2,3) = 1(1,1,-2) - 3\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$,
- $(3,0,-1) = 3(1,1,-2) - 3\left(0,1,-\frac{5}{3}\right)$,

entonces se concluye que $\{(1,-2,3),(3,0,-1)\}$ es una nueva base de Y.

c) También se razona como en la versión anterior, pero tomando la base $B' = \big\{(1,1,-2), \big(0,1,-\frac{5}{3}\big)\big\}$. Así, todo vector $(x,y,z) \in Y$ es de la forma

$$(x,y,z) = a(1,1,-2) + b\left(0,1,-\frac{5}{3}\right),\ \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, Y viene dado por las ecuaciones parámetricas

$$\left\{\begin{array}{r} x = a, \\ y = a+b, \\ z = -2a - \frac{5}{3}b, \end{array}\right. \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Para hallar ecuaciones cartesianas de Y, basta con determinar los valores de x,y,z para los que el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} a = x \\ a+b = y \\ -2a - \frac{5}{3}b = z \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

es compatible. Usando eliminación gaussiana (y notación matricial),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & -\frac{5}{3} & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -\frac{5}{3} & z+2x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z+2x+\frac{5}{3}(y-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+z \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema (2.2) es compatible si y solo si $\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y + z = 0$. Quitando denominadores, se tiene que el subespacio vectorial Y (de $\mathbb{R}^3$) viene dado por la ecuación cartesiana

$$x + 5y + 3z = 0.$$