

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace.**

Ejercicio 2.24

Enunciado

A partir de la base $B = \{(3, 1, 0, 0), (1, 3, 1, 0), (0, 1, 3, 1), (0, 0, 1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^4$, y haciendo uso del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, obtén una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar usual).

Resolución

Consideremos $v_1 = (3, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 3, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 3, 1)$ y $v_4 = (0, 0, 1, 3)$. Hallemos una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$, $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, aplicando Gram-Schmidt paso a paso.

■ $u_1 = (3, 1, 0, 0)$.

■ $u_2 = (1, 3, 1, 0) + \alpha(3, 1, 0, 0)$ de forma que $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$. Por tanto,

$$\langle u_2, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle (1, 3, 1, 0) + \alpha(3, 1, 0, 0), (3, 1, 0, 0) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle (1, 3, 1, 0), (3, 1, 0, 0) \rangle + \langle (3, 1, 0, 0), (3, 1, 0, 0) \rangle \alpha = 0 = 0 \Rightarrow 6 + 10\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{10} = \frac{-2}{5} \Rightarrow$$

$$u_2 = \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right).$$

■ $u_3 = (0, 1, 3, 1) + \alpha_1(3, 1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right)$ de forma que $\langle u_3, u_1 \rangle = 0$ y $\langle u_3, u_2 \rangle = 0$. Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} \langle u_3, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle (0, 1, 3, 1) + \alpha_1(3, 1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right), (3, 1, 0, 0) \rangle = 0 \\ \langle u_3, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle (0, 1, 3, 1) + \alpha_1(3, 1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right), \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle (0, 1, 3, 1), (3, 1, 0, 0) \rangle + \alpha_1 \langle (3, 1, 0, 0), (3, 1, 0, 0) \rangle + \alpha_2 \langle \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right), (3, 1, 0, 0) \rangle = 0 \\ \langle (0, 1, 3, 1), \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right) \rangle + \alpha_1 \langle (3, 1, 0, 0), \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right) \rangle + \alpha_2 \langle \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right), \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 10\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \\ \frac{27}{5} + 0\alpha_1 + \frac{37}{5}\alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{-1}{10} \\ \alpha_2 = \frac{-27}{37} \end{array} \right. \Rightarrow u_3 = \left(\frac{21}{74}, \frac{-63}{74}, \frac{84}{37}, 1 \right).$$

■ $u_4 = (0, 0, 1, 3) + \alpha_1(3, 1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{-4}{5}, \frac{12}{5}, 1, 0 \right) + \alpha_3 \left(\frac{21}{74}, \frac{-63}{74}, \frac{84}{37}, 1 \right)$ de forma que $\langle u_4, u_1 \rangle = 0$, $\langle u_4, u_2 \rangle = 0$ y $\langle u_4, u_3 \rangle = 0$. Operando de modo análogo al de u_2 y u_3 , se tiene que

$$u_4 = \left(\frac{-11}{103}, \frac{33}{103}, \frac{-88}{103}, \frac{231}{103} \right).$$

Ejercicio 2.25

Enunciado

Aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal del espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 en $[0, 1]$, considerando el producto escalar usual, a partir de la base $B = \{x^2, x(1-x), (1-x)^2\}$.

Resolución

En este ejercicio el producto escalar es el dado por

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \, dx,$$

para dos polinomios cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}_2[0, 1]$.

Sean $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = x(1-x)$ y $p_3(x) = (1-x)^2$. Además, denotemos por $B' = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ a la base resultante de aplicar Gram-Schmidt a la base B . Así,

- $q_1(x) = x^2$.
- $q_2(x) = x(1-x) + \alpha x^2$, de forma que $\langle q_2(x), q_1(x) \rangle = 0$. Por tanto,

$$\int_0^1 (x(1-x) + \alpha x^2) x^2 \, dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 x(1-x)x^2 \, dx + \alpha \int_0^1 x^2 x^2 \, dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{20} + \alpha \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-1}{4} \Rightarrow q_2(x) = x - \frac{5}{4}x^2.$$

- $q_3(x) = (1-x)^2 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x - \frac{5}{4}x^2)$, de forma que $\langle q_3(x), q_1(x) \rangle = 0$ y $\langle q_3(x), q_2(x) \rangle = 0$. Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 ((1-x)^2 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x - \frac{5}{4}x^2)) x^2 \, dx &= 0 \\ \int_0^1 ((1-x)^2 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x - \frac{5}{4}x^2)) (x - \frac{5}{4}x^2) \, dx &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^2 x^2 \, dx + \alpha_1 \int_0^1 x^2 x^2 \, dx + \alpha_2 \int_0^1 (x - \frac{5}{4}x^2) x^2 \, dx &= 0 \\ \int_0^1 (1-x)^2 (x - \frac{5}{4}x^2) \, dx + \alpha_1 \int_0^1 x^2 (x - \frac{5}{4}x^2) \, dx + \alpha_2 \int_0^1 (x - \frac{5}{4}x^2) (x - \frac{5}{4}x^2) \, dx &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{30} + \frac{1}{5}\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ \frac{1}{24} + 0\alpha_1 + \frac{1}{48}\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{-1}{6} \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow q_3(x) = 1 - 4x + \frac{10}{3}x^2.$$

Ejercicio 2.26

Enunciado

Sea Y el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por la ecuación cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0$. Obtén una base de Y y aplica a dicha base el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para conseguir una base ortogonal de Y .

Resolución

Resolviendo la ecuación cartesiana de Y , tenemos que

$$\begin{cases} x_1 = a + b + 5c, \\ x_2 = -a, \\ x_3 = b, \\ x_4 = c, \end{cases} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, todos los vectores de Y se generan por $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ y $(5, 0, 0, 1)$. Además, como estos tres vectores son linealmente independientes (¡compruébese!), concluimos que podemos tomar como base de Y al conjunto $B = \{(1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (5, 0, 0, 1)\}$.

Aplicemos ahora el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal de Y .

■ $u_1 = (1, -1, 0, 0)$.

■ $u_2 = (1, 0, 1, 0) + \alpha(1, -1, 0, 0)$, de forma que $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$. Por tanto,

$$\langle (1, 0, 1, 0) + \alpha(1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle (1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle + \alpha \langle (1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right).$$

■ $u_3 = (5, 0, 0, 1) + \alpha_1(1, -1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right)$, de forma que $\langle u_3, u_1 \rangle = 0$ y $\langle u_3, u_2 \rangle = 0$. Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \langle (5, 0, 0, 1) + \alpha_1(1, -1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right), (1, -1, 0, 0) \rangle &= 0 \\ \langle (5, 0, 0, 1) + \alpha_1(1, -1, 0, 0) + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \langle (5, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle + \alpha_1 \langle (1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle + \alpha_2 \langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right), (1, -1, 0, 0) \rangle &= 0 \\ \langle (5, 0, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \rangle + \alpha_1 \langle (1, -1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \rangle + \alpha_2 \langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 5 + 2\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 0 \\ \frac{5}{2} + 0\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{5}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow u_3 = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 1 \right).$$

Como conclusión, $B' = \{(1, -1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right), \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 1 \right)\}$ es una base ortogonal de Y .