Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 2(4)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 2.28

Enunciado

Halla el complemento ortogonal del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ dado por

$$Y = L\left(\{(1,2,3,4,5),(0,2,0,1,0),(0,1,1,0,0)\}\right).$$

Resolución

Sabemos que el complemento ortogonal de Y es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ formado por todos los vectores que son ortogonales a Y, esto es, que son ortogonales a todos los vectores de Y.

Ahora bien, ya que $\{(1,2,3,4,5),(0,2,0,1,0),(0,1,1,0,0)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes (¡compruébese!), resulta que conocemos una base de Y. En consecuencia, para comprobar si un vector $v \in \mathbb{R}^5$ es ortogonal a Y basta con comprobar que

$$\langle v,(1,2,3,4,5)\rangle = 0, \quad \langle v,(0,2,0,1,0)\rangle = 0, \quad \langle v,(0,1,1,0,0)\rangle = 0.$$

Si consideramos $v = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ y denotamos por $Y^\perp$ al complemento ortogonal de Y, entonces

$$Y^\perp = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= 0 \\ 2x_2+x_4 &= 0 \\ x_2+x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo que define a $Y^\perp$, una base de $Y^\perp$ es $\{(9,1,-1,-2,0),(5,0,0,0,1)\}$.

Comentarios previos a la resolución de los ejercicios 2.29-2.35

En este tipo de ejercicios el primer paso es determinar el subespacio vectorial en el que se aproxima, el vector que va a ser aproximado y el producto escalar considerado.

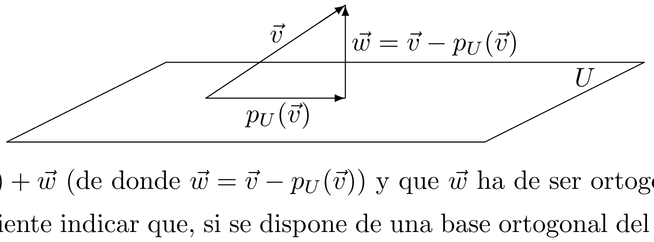
Por otra parte, teniendo en cuenta la definición 7.2, el resultado 7.3 y la definición 7.4 del tema 2, los dos siguientes problemas son equivalentes.

i) Sea un espacio vectorial euclídeo $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$, un subespacio vectorial U de V y un vector $\vec{v} \in V$. Calcula la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre U.

ii) Sea un espacio vectorial euclídeo $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$, un subespacio vectorial U de V y un vector $\vec{v} \in V$. Calcula la mejor aproximación (o aproximación por mínimos cuadrados) de $\vec{v}$ en U.

En ambos casos la solución viene dada por $p_U(\vec{v})$, esto es, por la proyección de $\vec{v}$ sobre U.

Para recordar cómo hay que realizar los cálculos, el siguiente dibujo puede ser de ayuda.



Obsérvese que $\vec{v} = p_U(\vec{v}) + \vec{w}$ (de donde $\vec{w} = \vec{v} - p_U(\vec{v})$) y que $\vec{w}$ ha de ser ortogonal a U.

Por último es conveniente indicar que, si se dispone de una base ortogonal del subespacio vectorial U, entonces los sistemas que surgen, al calcular la proyección ortogonal, serán bastante fáciles de resolver. Esto se puede apreciar en el Ejercicio 2.29.

Ejercicio 2.29

Enunciado

En cada caso, determina la proyección ortogonal del vector $v = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ sobre los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

a) $Y_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

b) $Y_2 = L(\{(1,2,3),(0,2,2)\})$.

Resolución

En este ejercicio consideraremos el producto escalar usual de vectores de $\mathbb{R}^3$: si $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

a) Tras los cálculos pertinentes (¡háganse!), tenemos que $B = \{(2,1,0),(3,-6,-5)\}$ es una base ortogonal de Y_1. Por otra parte, la proyección $p_{Y_1}(\vec{v})$ pertenece a Y_1, de donde

$$p_{Y_1}(\vec{v}) = a(2,1,0) + b(3,-6,-5), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ya que $\vec{v} - p_{Y_1}(\vec{v})$ es ortogonal a Y_1, entonces

$$\left.\begin{array}{r} \langle \vec{v} - p_{Y_1}(\vec{v}), (2,1,0) \rangle = 0 \\ \langle \vec{v} - p_{Y_1}(\vec{v}), (3,-6,-5) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \langle (1,2,1) - a(2,1,0) - b(3,-6,-5), (2,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,1) - a(2,1,0) - b(3,-6,-5), (3,-6,-5) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \langle (1,2,1),(2,1,0) \rangle - a\langle (2,1,0),(2,1,0) \rangle - b\langle (3,-6,-5),(2,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,1),(3,-6,-5) \rangle - a\langle (2,1,0),(3,-6,-5) \rangle - b\langle (3,-6,-5),(3,-6,-5) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 4 - 5a - 0b = 0 \\ -14 - 0a - 70b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{-1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow p_{Y_1}(\vec{v}) = \frac{4}{5}(2,1,0) - \frac{1}{5}(3,-6,-5) = (1,2,1).$$

Obsérvese que, al ser B una base ortogonal, el sistema para hallar a y b es muy fácil de resolver.

b) En este caso, ya que $(1,2,3),(0,2,2)$ son vectores linealmente independientes (¿por qué?), tenemos que $B = \{(1,2,3),(0,2,2)\}$ es una base de Y_2. Por otra parte, como $p_{Y_2}(\vec{v})$ pertenece a Y_2, entonces

$$p_{Y_2}(\vec{v}) = a(1,2,3) + b(0,2,2), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Puesto que $\vec{v} - p_{Y_2}(\vec{v})$ es ortogonal a Y_2, entonces

$$\left.\begin{array}{r} \langle \vec{v} - p_{Y_2}(\vec{v}), (1,2,3) \rangle = 0 \\ \langle \vec{v} - p_{Y_2}(\vec{v}), (0,2,2) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \langle (1,2,1) - a(1,2,3) - b(0,2,2), (1,2,3) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,1) - a(1,2,3) - b(0,2,2), (0,2,2) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \langle (1,2,1),(1,2,3) \rangle - a\langle (1,2,3),(1,2,3) \rangle - b\langle (0,2,2),(1,2,3) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,1),(0,2,2) \rangle - a\langle (1,2,3),(0,2,2) \rangle - b\langle (0,2,2),(0,2,2) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 8 - 14a - 10b = 0 \\ 6 - 10a - 8b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow p_{Y_2}(\vec{v}) = \frac{1}{3}(1,2,3) - \frac{1}{3}(0,2,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

En esta ocasión, al no ser B una base ortogonal, el sistema para hallar a y b es algo más complicado de resolver.

Ejercicio 2.30

Enunciado

Calcula la recta $y = mx + n$, la parábola $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ y la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que mejor aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados continuos en $[-1, 1]$, a la función

$$f(x) = |x|, \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

Resolución

En este ejercicio tenemos que considerar el producto escalar dado por

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x)\ \mathrm{d}x,$$

siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones continuas en $[-1, 1]$.

Cálculo de la recta. Calcular la recta que mejor aproxima a la función $f(x) = |x|$, en el sentido de los mínimos cuadrados en $[-1, 1]$, es equivalente a calcular la proyección de $f(x) = |x|$ en el subespacio vectorial $\mathbb{P}_1$, que está formado por los polinomios de grado menor o igual que uno. Por tanto, si denotamos por $p(x) = mx + n$ a la proyección buscada, entonces $f(x) - p(x) = |x| - mx - n$ ha de ser ortogonal a $\mathbb{P}_1$. Así, teniendo en cuenta que $\{1, x\}$ es una base de $\mathbb{P}_1$,

$$\left.\begin{array}{r}\langle f(x)-p(x),1\rangle = 0\\ \langle f(x)-p(x),x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\langle |x|-mx-n,1\rangle = 0\\ \langle |x|-mx-n,x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\langle |x|,1\rangle - m\langle x,1\rangle - n\langle 1,1\rangle = 0\\ \langle |x|,x\rangle - m\langle x,x\rangle - n\langle 1,x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(ya que $\int_{-1}^{1} |x|\ \mathrm{d}x = 1$, $\int_{-1}^{1} |x|x\ \mathrm{d}x = 0$, $\int_{-1}^{1} 1\ \mathrm{d}x = 2$, $\int_{-1}^{1} x\ \mathrm{d}x = 0$ y $\int_{-1}^{1} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$)

$$\left.\begin{array}{r}1 - 0m - 2n = 0\\ 0 - \frac{2}{3}m - 0n = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 0\\ n = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow p(x) = 0x + \frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}.$$

Cálculo de la parábola. Para calcular la parábola que mejor aproxima a la función $f(x) = |x|$, en el sentido de los mínimos cuadrados en $[-1, 1]$, tenemos que calcular la proyección de $f(x) = |x|$ en el subespacio vectorial $\mathbb{P}_2$, que está formado por los polinomios de grado menor o igual que dos. Denotando por $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ a la proyección buscada, entonces $f(x) - p(x) = |x| - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$ es ortogonal a $\mathbb{P}_2$. Por tanto, ya que $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$,

$$\left.\begin{array}{r}\langle f(x)-p(x),1\rangle = 0\\ \langle f(x)-p(x),x\rangle = 0\\ \langle f(x)-p(x),x^2\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\langle |x|-\alpha x^2-\beta x-\gamma,1\rangle = 0\\ \langle |x|-\alpha x^2-\beta x-\gamma,x\rangle = 0\\ \langle |x|-\alpha x^2-\beta x-\gamma,x^2\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\langle |x|,1\rangle - \alpha\langle x^2,1\rangle - \beta\langle x,1\rangle - \gamma\langle 1,1\rangle = 0\\ \langle |x|,x\rangle - \alpha\langle x^2,x\rangle - \beta\langle x,x\rangle - \gamma\langle 1,x\rangle = 0\\ \langle |x|,x^2\rangle - \alpha\langle x^2,x^2\rangle - \beta\langle x,x^2\rangle - \gamma\langle 1,x^2\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(ya que, además de las integrales antes vistas, $\int_{-1}^{1} |x|x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_{-1}^{1} x^3\ \mathrm{d}x = 0$ y $\int_{-1}^{1} x^4\ \mathrm{d}x = \frac{2}{5}$)

$$\left.\begin{array}{r}1 - 2\alpha - 0\beta - \frac{2}{3}\gamma = 0\\ 0 - 0\alpha - \frac{2}{3}\beta - 0\gamma = 0\\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\alpha - 0\beta - \frac{2}{5}\gamma = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{16}\\ \beta = 0\\ \gamma = \frac{15}{16}\end{array}\right. \Rightarrow p(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}.$$

Cálculo de la cúbica. En este caso la proyección de $f(x) = |x|$ es en el subespacio vectorial $\mathbb{P}_3$, que está formado por los polinomios de grado menor o igual que tres. Cálculos similares a los efectuados para la recta y la parábola, conducen a la solución buscada:

$$p(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}.$$

Obsérvese que es justamente la parábola antes hallada.

Ejercicio 2.31

Enunciado

Determina la mejor aproximación por mínimos cuadrados en $\mathbb{P}_2([0,\pi])$ de las funciones

$$f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi,$$

y

$$g(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Resolución

En este ejercicio el producto escalar que debemos considerar es

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_0^\pi f_1(x) f_2(x)\ \mathrm{d}x,$$

siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones continuas en $[0,\pi]$.

Aproximación del coseno. Siendo $p(x) = a + bx + cx^2$ la proyección ortogonal de $f(x) = \cos(x)$ sobre $\mathbb{P}_2([0,\pi])$, se verifica que $f(x) - p(x)$ es ortogonal a $\mathbb{P}_2([0,\pi])$, de donde (tomando $B = \{1, x, x^2\}$ como base de $\mathbb{P}_2([0,\pi])$)

$$\left.\begin{array}{r} \langle f(x) - p(x), 1 \rangle = 0 \\ \langle f(x) - p(x), x \rangle = 0 \\ \langle f(x) - p(x), x^2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \langle \cos(x) - a - bx - cx^2, 1 \rangle = 0 \\ \langle \cos(x) - a - bx - cx^2, x \rangle = 0 \\ \langle \cos(x) - a - bx - cx^2, x^2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \langle \cos(x), 1 \rangle - a\langle 1, 1 \rangle - b\langle x, 1 \rangle - c\langle x^2, 1 \rangle = 0 \\ \langle \cos(x), x \rangle - a\langle 1, x \rangle - b\langle x, x \rangle - c\langle x^2, x \rangle = 0 \\ \langle \cos(x), x^2 \rangle - a\langle 1, x^2 \rangle - b\langle x, x^2 \rangle - c\langle x^2, x^2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(ya que $\int_0^\pi \cos(x)\ \mathrm{d}x = 0$, $\int_0^\pi x\cos(x)\ \mathrm{d}x = -2$, $\int_0^\pi x^2\cos(x)\ \mathrm{d}x = -2\pi$, $\int_0^\pi 1\ \mathrm{d}x = \pi$, $\int_0^\pi x\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$, $\int_0^\pi x^2\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3}$, $\int_0^\pi x^3\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{4}$ y $\int_0^\pi x^4\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^5}{5}$)

$$\left.\begin{array}{r} 0 - \pi a - \frac{\pi^2}{2}b - \frac{\pi^3}{3}c = 0 \\ -2 - \frac{\pi^2}{2}a - \frac{\pi^3}{3}b - \frac{\pi^4}{4}c = 0 \\ -2\pi - \frac{\pi^3}{3}a - \frac{\pi^4}{4}b - \frac{\pi^5}{5}c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{12}{\pi^2} \\ b = \frac{-24}{\pi^3} \\ c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow p(x) = \frac{-24}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2}.$$

Aproximación del seno. Los cálculos son similares a los hechos para el seno. Así, teniendo en cuenta que $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\ \mathrm{d}x = 2$, $\int_0^\pi x\operatorname{sen}(x)\ \mathrm{d}x = -\pi$, $\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}(x)\ \mathrm{d}x = -2\pi$,

$$\left.\begin{array}{r} 2 - \pi a - \frac{\pi^2}{2}b - \frac{\pi^3}{3}c = 0 \\ \pi - \frac{\pi^2}{2}a - \frac{\pi^3}{3}b - \frac{\pi^4}{4}c = 0 \\ \pi^2 - 4 - \frac{\pi^3}{3}a - \frac{\pi^4}{4}b - \frac{\pi^5}{5}c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{-12(10-\pi^2)}{\pi^3} \\ b = \frac{60(12-\pi^2)}{\pi^4} \\ c = \frac{-60(12-\pi^2)}{\pi^5} \end{array}\right. \Rightarrow p(x) = -\frac{60(12-\pi^2)}{\pi^5}x^2 + \frac{60(12-\pi^2)}{\pi^4}x - \frac{12(10-\pi^2)}{\pi^3}.$$

Ejercicio 2.32

Enunciado

Calcula la mejor aproximación mediante mínimos cuadrados de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

y

$$g(x) = e^x$$

en $\mathbb{P}_2([1,2])$ y $\mathbb{P}_2([-1,1])$, respectivamente.

Resolución

En este ejercicio hay que considerar dos productos escalares.

- Para aproximar $f(x) = \frac{1}{x}$ en $\mathbb{P}_2([1,2])$ tomaremos

  $$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_1^2 f_1(x) f_2(x) \, \mathrm{d}x,$$

  siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones continuas en $[1,2]$.

- Para aproximar $g(x) = e^x$ en $\mathbb{P}_2([-1,1])$ tomaremos

  $$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 f_1(x) f_2(x) \, \mathrm{d}x,$$

  siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones continuas en $[-1,1]$.

Los cálculos son totalmente análogos a los hechos en los ejercicios 2.30 y 2.31, por lo que solo se dan las soluciones correspondientes.

- La mejor aproximación por mínimos cuadrados de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $\mathbb{P}_2([1,2])$ es

  $$p(x) = \big(873\ln(2) - 603\big) - \big(1188\ln(2) - 822\big)x + \big(390\ln(2) - 270\big)x^2.$$

- La mejor aproximación por mínimos cuadrados de $g(x) = e^x$ en $\mathbb{P}_2([-1,1])$ es

  $$p(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{11}{e} - e\right) + \frac{3}{e}x + \frac{15}{4}\left(e - \frac{7}{e}\right)x^2.$$

Ejercicio 2.33

Enunciado

Halla la recta de ecuación $y = ax + b$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos recogidos en la siguiente tabla.

x_i	1	2	0	3
y_i	1	1	2	-2

Si los datos anteriores corresponden a las observaciones experimentales de la temperatura mínima diaria (en grados centígrados) en una ciudad a lo largo de cuatro días (0, 1, 2 y 3), usa dicha recta para estimar la temperatura mínima en el día 6.

Resolución

En este ejercicio el producto escalar es

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \langle \big(f_1(1), f_1(2), f_1(0), f_1(3)\big), \big(f_2(1), f_2(2), f_2(0), f_2(3)\big)\rangle.$$

Además, el subespacio vectorial sobre el que se realizará la proyección es $\mathbb{P}_1$ (esto es, los polinomios de grado menor o igual que uno).

Consideremos la función $f(x)$ dada por los datos de la tabla del enunciado. O sea,

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0) = 2, \quad f(3) = -2.$$

Si denotamos por $p(x) = ax+b$ a la proyección de $f(x)$ sobre $\mathbb{P}_1$, entonces $f(x)-p(x)$ ha de ser ortogonal a $\mathbb{P}_1$. Por tanto, ya que $B = \{1, x\}$ es una base de $\mathbb{P}_1$,

$$\left.\begin{array}{l}\langle f(x) - p(x), 1\rangle = 0\\ \langle f(x) - p(x), x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\langle f(x) - ax - b, 1\rangle = 0\\ \langle f(x) - ax - b, x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\langle f(x), 1\rangle - a\langle x, 1\rangle - b\langle 1, 1\rangle = 0\\ \langle f(x), x\rangle - a\langle x, x\rangle - b\langle 1, x\rangle = 0\end{array}\right\}.$$

Para realizar los productos escalares del sistema hay que tener en cuenta que

- a $f(x)$ le corresponde el vector $\big(f(1), f(2), f(0), f(3)\big) = (1, 1, 2, -2)$;
- a la función $p_1(x) = 1$ le corresponde el vector $(1, 1, 1, 1)$ (tras evaluar en 1, 2, 0 y 3);
- a la función $p_2(x) = x$ le corresponde el vector $(1, 2, 0, 3)$ (tras evaluar en 1, 2, 0 y 3).

A partir de aquí,

$$\left.\begin{array}{l}\langle(1,1,2,-2),(1,1,1,1)\rangle - a\langle(1,2,0,3),(1,1,1,1)\rangle - b\langle(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 0\\ \langle(1,1,2,-2),(1,2,0,3)\rangle - a\langle(1,2,0,3),(1,2,0,3)\rangle - b\langle(1,1,1,1),(1,2,0,3)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}2 - 6a - 4b = 0\\ -3 - 14a - 6b = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = \frac{-6}{5}\\ b = \frac{23}{10}\end{array}\right. \Rightarrow p(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{23}{10}.$$

Para estimar la temperatura mínima en el día 6 basta con tomar $p(6) = -\frac{49}{10} = -4.9$.

Comentario. Por los cálculos realizados, el problema planteado en el enunciado se ha transformado en el siguiente: halla la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 2, -2)$ en el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 0, 3)$.

En esta interpretación

- el vector $(1, 1, 2, -2)$ corresponde a las imágenes de los valores de la tabla (los y_i);
- el vector $(1, 1, 1, 1)$ corresponde a las evaluaciones de la función $p_1(x) = 1$ en los orígenes de los valores de la tabla (los x_i);
- el vector $(1, 2, 0, 3)$ corresponde a las evaluaciones de la función $p_2(x) = x$ en los orígenes de los valores de la tabla (los x_i).

Ejercicio 2.34

Enunciado

Calcula la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos del Ejercicio 2.33.

Resolución

Nuevamente el producto escalar es

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \langle \big(f_1(1), f_1(2), f_1(0), f_1(3)\big), \big(f_2(1), f_2(2), f_2(0), f_2(3)\big)\rangle.$$

Pero, en este caso, el subespacio vectorial sobre el que se realizará la proyección es $\mathbb{P}_2$ (esto es, los polinomios de grado menor o igual que dos).

Como en el ejercicio anterior, sea $f(x)$ la función dada por los datos de la tabla del enunciado.

$$f(1) = 1, \;\; f(2) = 1, \;\; f(0) = 2, \;\; f(3) = -2.$$

Si denotamos por $p(x) = ax^2 + bx + c$ a la proyección de $f(x)$ sobre $\mathbb{P}_2$, entonces $f(x) - p(x)$ debe ser ortogonal a $\mathbb{P}_2$. Por tanto, ya que $B = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$,

$$\left.\begin{array}{c} \langle f(x) - p(x), 1\rangle = 0 \\ \langle f(x) - p(x), x\rangle = 0 \\ \langle f(x) - p(x), x^2\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \langle f(x) - ax^2 - bx - c, 1\rangle = 0 \\ \langle f(x) - ax^2 - bx - c, x\rangle = 0 \\ \langle f(x) - ax^2 - bx - c, x^2\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \langle f(x), 1\rangle - a\langle x^2, 1\rangle - b\langle x, 1\rangle - c\langle 1, 1\rangle = 0 \\ \langle f(x), x\rangle - a\langle x^2, x\rangle - b\langle x, x\rangle - c\langle 1, x\rangle = 0 \\ \langle f(x), x^2\rangle - a\langle x^2, x^2\rangle - b\langle x, x^2\rangle - c\langle 1, x^2\rangle = 0 \end{array}\right\}.$$

Para realizar los productos escalares del sistema hay que tener en cuenta que

- a $f(x)$ le corresponde el vector $\big(f(1), f(2), f(0), f(3)\big) = (1, 1, 2, -2)$;
- a la función $p_1(x) = 1$ le corresponde el vector $(1, 1, 1, 1)$ (tras evaluar en 1, 2, 0 y 3);
- a la función $p_2(x) = x$ le corresponde el vector $(1, 2, 0, 3)$ (tras evaluar en 1, 2, 0 y 3);
- a la función $p_3(x) = x^2$ le corresponde el vector $(1, 4, 0, 9)$ (tras evaluar en 1, 2, 0 y 3).

A partir de aquí,

$$\left.\begin{array}{c} \langle(1,1,2,-2),(1,1,1,1)\rangle - a\langle(1,4,0,9),(1,1,1,1)\rangle - b\langle(1,2,0,3),(1,1,1,1)\rangle - c\langle(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 0 \\ \langle(1,1,2,-2),(1,2,0,3)\rangle - a\langle(1,4,0,9),(1,2,0,3)\rangle - b\langle(1,2,0,3),(1,2,0,3)\rangle - c\langle(1,1,1,1),(1,2,0,3)\rangle = 0 \\ \langle(1,1,2,-2),(1,4,0,9)\rangle - a\langle(1,4,0,9),(1,4,0,9)\rangle - b\langle(1,4,0,9),(1,2,0,3)\rangle - c\langle(1,1,1,1),(1,4,0,9)\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 2 - 14a - 6b - 4c = 0 \\ -3 - 36a - 14b - 6c = 0 \\ -13 - 98a - 36b - 14c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{3}{10} \\ c = \frac{18}{10} \end{array}\right. \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{10}x + \frac{18}{10}.$$

Comentario. Por los cálculos realizados, el problema planteado en el enunciado se ha transformado en el siguiente: halla la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 2, -2)$ en el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 0, 3)$ y $(1, 4, 0, 9)$.

Ejercicio 2.35

Enunciado

Determina el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la recta que mejor aproxime, en el sentido de los mínimos cuadrados, los puntos $(1,1)$, $(0,1)$, $(2,2)$, $(1,\alpha)$, sea

$$y = \frac{x}{2} + 1.$$

Resolución

El producto escalar a considerar en este ejercicio es

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \big\langle \big(f_1(1), f_1(0), f_1(2), f_1(1)\big), \big(f_2(1), f_2(0), f_2(2), f_2(1)\big)\big\rangle.$$

Obsérvese que se evalúa dos veces en $x = 1$ pues hay dos datos correspondientes a este valor en el origen. Esta circunstancia es frecuente en los problemas de la vida real en los que se ajusta mediante la recta de mínimos cuadrados.

Además, el subespacio vectorial sobre el que se realizará la proyección es $\mathbb{P}_1$ (esto es, los polinomios de grado menor o igual que uno).

Sea $f(x)$ la función dada por los datos de la tabla del enunciado. Esto es,

$$f(1) = 1, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(1) = \alpha.$$

Como queremos que $p(x) = \frac{x}{2}+1$ sea la mejor aproximación por mínimos cuadrados, entonces $p(x) = \frac{x}{2}+1$ ha de ser la proyección de $f(x)$ sobre $\mathbb{P}_1$ y, por consiguiente, $f(x)-p(x)$ debe ser ortogonal a $\mathbb{P}_1$. Teniendo en cuenta que $B = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_1$,

$$\left.\begin{array}{l} \langle f(x)-p(x), 1\rangle = 0 \\ \langle f(x)-p(x), x\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \langle f(x)-\frac{1}{2}x-1, 1\rangle = 0 \\ \langle f(x)-\frac{1}{2}x-1, x\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \langle f(x), 1\rangle - \frac{1}{2}\langle x, 1\rangle - 1\langle 1, 1\rangle = 0 \\ \langle f(x), x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle - 1\langle 1, x\rangle = 0 \end{array}\right\}.$$

Para realizar los productos escalares del sistema hay que tener en cuenta que

- a $f(x)$ le corresponde el vector $\big(f(1), f(0), f(2), f(1)\big) = (1,1,2,\alpha)$;
- a la función $p(x) = \frac{x}{2}+1$ le corresponde el vector $\big(\frac{3}{2}, 1, 2, \frac{3}{2}\big)$ (tras evaluar en 1, 0, 2 y 1).

A partir de aquí,

$$\left.\begin{array}{l} \langle (1,1,2,\alpha), (1,1,1,1)\rangle - \langle \big(\frac{3}{2},1,2,\frac{3}{2}\big), (1,1,1,1)\rangle = 0 \\ \langle (1,1,2,\alpha), (1,0,2,1)\rangle - \langle \big(\frac{3}{2},1,2,\frac{3}{2}\big), (1,0,2,1)\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+\alpha-6 = 0 \\ 5+\alpha-7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 2.$$

Comentario. Por los cálculos realizados, el problema planteado en el enunciado se ha transformado en el siguiente: halla el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $\big(\frac{3}{2}, 1, 2, \frac{3}{2}\big)$ sea la proyección ortogonal del vector $(1,1,2,\alpha)$ en el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1)$, $(1,0,2,1)$.

Ejercicio 2.27

Enunciado

En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres ($\mathbb{P}_3$), con el producto escalar usual de las funciones de $C([0,1])$, considera el subespacio vectorial Y dado por

$$Y = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \;\middle|\; \begin{array}{c} a_0 - 2a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

a) Halla una base de Y.

b) Calcula una base ortogonal de Y.

c) Calcula la proyección ortogonal del polinomio $-1 + 2x + 3x^2 + x^3$ sobre Y.

Resolución

a) Para hallar una base de Y necesitamos resolver el sistema de ecuaciones que define a Y. Haciendo esto se llega a que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3}\mu \\ \frac{-1}{3}\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, todos los polinomios de Y están generados por $p_1(x) = x^2$ y $p_2(x) = x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. Además, como $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son linealmente independientes (¿por qué?), tenemos que $\{p_1(x), p_2(x)\}$ es una base de Y.

Ahora bien, para eliminar fracciones en los coeficientes, podemos multiplicar $p_2(x)$ por tres y, en tal caso, la base de Y será $\{x^2, 3x^3 - x - 2\}$.

b) Para calcular una base ortogonal $\{q_1(x), q_2(x)\}$ de Y aplicaremos el método de Gram-Schmidt. De acuerdo con el enunciado, el producto escalar a considerar es

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \, \mathrm{d}x,$$

siendo $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones continuas en $[0,1]$.

- $q_1(x) = p_1(x) = x^2$.
- $q_2(x) = p_2(x) + \alpha q_1(x) = 3x^3 - x - 2 + \alpha x^2$, de forma que $\langle q_2(x), q_1(x) \rangle = 0$. Por tanto,

$$\langle q_2(x), q_1(x) \rangle = \int_0^1 q_2(x) q_1(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^3 - x - 2 + \alpha x^2) x^2 \, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (3x^5 - x^3 - 2x^2 + \alpha x^4) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \alpha \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{-5}{12} + \frac{\alpha}{5} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{25}{12}.$$

Por tanto, una base ortogonal de Y es $\left\{x^2, 3x^3 + \frac{25}{12}x^2 - x - 2\right\}$. En su lugar, eliminado denominadores, tomaremos la base $\{q_1(x), q_2(x)\} = \left\{x^2, 36x^3 + 25x^2 - 12x - 24\right\}$ (¿por qué se puede hacer esto?).

c) Sea $r(x)$ la proyección ortogonal del polinomio $-1 + 2x + 3x^2 + x^3$ sobre Y. Entonces,

- $r(x) = aq_1(x) + bq_2(x)$, por pertenecer $r(x)$ a Y;
- $-1 + 2x + 3x^2 + x^3 - r(x)$ ha de ser ortogonal a Y.

A partir de aquí,

$$\left.\begin{array}{l}\langle -1+2x+3x^2+x^3-aq_1(x)-bq_2(x), q_1(x)\rangle = 0\\ \langle -1+2x+3x^2+x^3-aq_1(x)-bq_2(x), q_2(x)\rangle = 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle -1+2x+3x^2+x^3, q_1(x)\rangle - a\langle q_1(x), q_1(x)\rangle - b\langle q_2(x), q_1(x)\rangle = 0\\ \langle -1+2x+3x^2+x^3, q_2(x)\rangle - a\langle q_1(x), q_2(x)\rangle - b\langle q_2(x), q_2(x)\rangle = 0\end{array}\right\}.$$

Por ser $\{q_1(x), q_2(x)\}$ una base ortogonal, tenemos que $\langle q_1(x), q_2(x)\rangle = 0$, de donde

$$\left.\begin{array}{l}\langle -1+2x+3x^2+x^3, q_1(x)\rangle - a\langle q_1(x), q_1(x)\rangle = 0\\ \langle -1+2x+3x^2+x^3, q_2(x)\rangle - b\langle q_2(x), q_2(x)\rangle = 0\end{array}\right\}.$$

Denotando $k_1 = \langle -1+2x+3x^2+x^3, q_1(x)\rangle$, $k_2 = \langle -1+2x+3x^2+x^3, q_2(x)\rangle$, $\|q_1(x)\|^2 = \langle q_1(x), q_1(x)\rangle$ y $\|q_2(x)\|^2 = \langle q_2(x), q_2(x)\rangle$, entonces

$$a = \frac{k_1}{\|q_1(x)\|^2},\ \ b = \frac{k_2}{\|q_2(x)\|^2} \Rightarrow r(x) = \frac{k_1}{\|q_1(x)\|^2}\, q_1(x) + \frac{k_2}{\|q_2(x)\|^2}\, q_2(x).$$

Como conclusión, $r(x)$ es la proyección de $-1+2x+3x^2+x^3$ sobre Y. Por cierto, un buen ejercicio de cálculo sería hallar a y b explícitamente.