Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – **Curso: 2022–2023**

Ejercicios desarrollados - Tema 2 (T1)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 1 (tema 2): ejercicio obligatorio (curso 2020–2021)

Enunciado

Considera el subconjunto $U = \big\{(0, \alpha, 0, \beta) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales).

a) Comprueba que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Comprueba que $\{(0,1,0,1), (0,2,0,1), (0,1,0,2)\}$ es un sistema de generadores de U.

c) Comprueba que $\{(0,1,0,1), (0,2,0,1), (0,1,0,2)\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$ y en U.

d) Razonando únicamente a partir de lo hecho en los apartados anteriores, ¿se puede afirmar que la dimensión de U es menor o igual que tres? Justifica adecuadamente tu respuesta.

Resolución

a) La principal particularidad de los vectores del conjunto U es que la primera y tercera componentes son nulas. Veamos que esta particularidad se mantiene tanto sumando dos vectores de U como multiplicando un vector de U por un número real.

- Sean $(0, \alpha_1, 0, \beta_1)$ y $(0, \alpha_2, 0, \beta_2)$ dos vectores cualesquiera de U. Entonces

$$(0, \alpha_1, 0, \beta_1) + (0, \alpha_2, 0, \beta_2) = (0, \alpha_1 + \alpha_2, 0, \beta_1 + \beta_2).$$

- Sea $(0, \alpha, 0, \beta)$ un vector cualquiera de U y a un número real cualquiera. Entonces

$$a \cdot (0, \alpha, 0, \beta) = (0, a\alpha, 0, a\beta).$$

Así pues, tenemos que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales).

b) En primer lugar debemos observar que $\{(0,1,0,1), (0,2,0,1), (0,1,0,2)\}$ es un subconjunto de vectores de U, por lo que (al ser U un subespacio vectorial) cualquier combinación lineal de tales vectores pertenecerá siempre a U.

Veamos ahora que cualquier vector $(0, \alpha, 0, \beta)$ de U se puede expresar como combinación lineal de los tres vectores dados. Esto es, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface que

$$(0, \alpha, 0, \beta) = a \cdot (0,1,0,1) + b \cdot (0,2,0,1) + c \cdot (0,1,0,2) \tag{1.1}$$

para valores adecuados de a, b, c. Ahora bien, que la combinación lineal (1.1) sea posible equivale a que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} a + 2b + c = \alpha \\ a + b + 2c = \beta \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

sea compatible para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto, necesitamos estudiar el carácter del sistema (1.2), para lo cual aplicaremos eliminación gaussiana, a la matriz ampliada del sistema, con el fin de obtener una matriz escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \beta-\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-\beta \end{array}\right).$$

Como se puede comprobar, la matriz reducida final tiene dos pivotes, por lo que el rango de la matriz ampliada es igual a dos. Además, ya que los dos pivotes están en la zona de la matriz de coeficientes, podemos afirmar que el sistema (1.2) es compatible.[1]

Por todo lo expuesto en este apartado, podemos afirmar que $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ es un sistema de generadores de U.

c) Primero debemos observar que el conjunto de vectores $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ es un conjunto de vectores pertenecientes tanto a $\mathbb{R}^4$ como a U. Por otra parte, para que un conjunto de vectores cualesquiera (de un mismo espacio vectorial) sea linealmente dependiente solo necesitamos comprobar que existen distintas combinaciones lineales del tipo

$$a(0,1,0,1)+b(0,2,0,1)+c(0,1,0,2)=(0,0,0). \tag{1.3}$$

Por tanto, si $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$, entonces también lo serán en U.[2]

Razonando como en el apartado anterior, que la combinación lineal (1.3) se verifique para varias ternas (a,b,c) equivale a que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+c=0 \\ a+b+2c=0 \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

sea compatible indeterminado. Pero, por los cálculos vistos anteriormente, el sistema (1.4) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+c=0 \\ b-c=0 \end{array}\right\}, \tag{1.5}$$

que, claramente, admite infinitas soluciones. A saber, $(a,b,c)=(-3\lambda,\lambda,\lambda)$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$.

Por tanto, podemos afirmar que $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes (en $\mathbb{R}^4$ y en U) ya que existen combinaciones lineales igualadas al vector cero donde algún coeficiente es no nulo. Por ejemplo,

$$3\cdot(0,1,0,1)-(0,2,0,1)-(0,1,0,2)=(0,0,0).$$

d) Al ser $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ un sistema de generadores de U, tenemos que con tres vectores es posible generar U. Por tanto, cualquier base de U no puede estar compuesta por más de tres vectores y, de este modo, la dimensión de U no puede tomar valores mayores o iguales que cuatro.[3]

[1] De hecho, el sistema es compatible indeterminado pues el rango de las matrices (de coeficientes y ampliada) es menor que el número de incógnitas del sistema (1.2). Además, el conjunto de soluciones sería el dado por

$$(a,b,c)=(2\beta-\alpha-3c,\alpha-\beta+c,c), \text{ para cualquier } c\in\mathbb{R}.$$

[2] De hecho, serán linealmente dependientes en cualquier subespacio vectorial que los contengan.

[3] Para dar un valor concreto de la dimensión de U necesitaríamos encontrar un sistema generador formado por vectores linealmente independientes. Esto se podría hacer completando los razonamientos expuestos en los apartados b y c. En efecto, del apartado c podemos concluir que $(0,1,0,1)$ y $(0,2,0,1)$ son linealmente independientes y, además, que

$$(0,1,0,2)=3\cdot(0,1,0,1)-(0,2,0,1).$$

Usando esta última igualdad en el apartado b, tenemos que

$$(0,\alpha,0,\beta)=(2\beta-\alpha-3c)\cdot(0,1,0,1)+(\alpha-\beta+c)\cdot(0,2,0,1)+c\cdot(0,1,0,2)=(2\beta-\alpha)\cdot(0,1,0,1)+(\alpha-\beta)\cdot(0,2,0,1).$$

Por tanto, todos los vectores de U se pueden expresar como combinación lineal de los vectores $(0,1,0,1)$ y $(0,2,0,1)$, que son linealmente independientes. Así, $B=\{(0,1,0,1),(0,2,0,1)\}$ es una base de U y, por consiguiente, la dimensión de U es igual a dos.

Tarea 1 (tema 2): ejercicio optativo (curso 2020–2021)

Enunciado

Halla todas las bases posibles de U que se pueden obtener eligiendo un número adecuado de vectores en el conjunto $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$. Justifica adecuadamente cada elección.

Resolución

Siguiendo el razonamiento visto en la nota (a pie de página) 3 del ejercicio obligatorio, para hallar bases de U a partir del conjunto de vectores $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ es suficiente eliminar uno de los tres vectores de forma que los restantes generen a U. Esto se puede llevar a cabo de tres maneras.

1. Puesto que $(0,1,0,2) = 3\cdot(0,1,0,1) - (0,2,0,1)$, entonces el conjunto $B_1 = \{(0,1,0,1),(0,2,0,1)\}$ es una base de U, como ya se comprobó en la nota mencionada.

2. Como $(0,2,0,1) = 3\cdot(0,1,0,1) - (0,1,0,2)$, entonces se puede comprobar que

$$(0,\alpha,0,\beta) = (2\alpha-\beta)\cdot(0,1,0,1) + (\beta-\alpha)\cdot(0,1,0,2),$$

   para cualesquiera $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Esto es, tenemos que $\{(0,1,0,1),(0,1,0,2)\}$ es un sistema de generadores de U. Además, es claro que $(0,1,0,1)$ y $(0,1,0,2)$ son dos vectores linealmente independientes. Por tanto, $B_2 = \{(0,1,0,1),(0,1,0,2)\}$ es otra base de U.

3. Por último, $(0,1,0,1) = \frac{1}{3}\cdot(0,2,0,1) + \frac{1}{3}\cdot(0,1,0,2)$, de donde

$$(0,\alpha,0,\beta) = \frac{2\alpha-\beta}{3}\cdot(0,2,0,1) + \frac{2\beta-\alpha}{3}\cdot(0,1,0,2),$$

   para cualesquiera $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Razonando como en el caso anterior, $B_3 = \{(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ es una nueva base de U.

Como conclusión, a partir del conjunto de vectores $\{(0,1,0,1),(0,2,0,1),(0,1,0,2)\}$ hemos obtenido tres bases distintas de U, sin que puedan existir más posibilidades.[4]

[4] Es claro que con un conjunto de tres elementos $\{p,q,r\}$ solo es posible formar tres subconjuntos distintos de dos elementos: $\{p,q\}$, $\{p,r\}$ y $\{q,r\}$.