Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 2

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Sobre sumas e intersecciones de subespacios vectoriales

Enunciado

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0\right\}$$

y

$$W_2 = \left\{(s, 2t, 3s, s+t) \in \mathbb{R}^4 \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Demuestra que $\mathbb{R}^4$ es la suma de ambos.

b) Calcula su intersección.

Resolución

a) Que $\mathbb{R}^4$ sea la suma de W_1 y W_2 (lo que se denota por $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$) significa que todo vector de $\mathbb{R}^4$ se puede poner como suma de un vector de W_1 y uno de W_2:

$$\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2 \text{ si, para todo } v \in \mathbb{R}^4, \text{ se verifica que } v = w_1 + w_2 \text{ con } w_1 \in W_1 \text{ y } v_2 \in W_2.$$

Ahora bien, sabemos que

- todo vector de W_1 viene dado como una combinación lineal de los elementos de una base de W_1, por ejemplo B_1;
- todo vector de W_2 viene dado como una combinación lineal de los elementos de una base de W_2, por ejemplo B_2.

Consecuentemente, si $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$, entonces todo vector de $\mathbb{R}^4$ se podrá expresar como una combinación lineal de los elementos del conjunto $B_1 \cup B_2$ (o sea, la unión de las dos bases consideradas). Es decir, para asegurar que $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$, basta con comprobar que $B_1 \cup B_2$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$ (o, si se prefiere, basta con comprobar que $B_1 \cup B_2$ contiene a una base de $\mathbb{R}^4$).

A partir de los comentarios anteriores es claro que, para resolver el ejercicio, es conveniente comenzar hallando una base de W_1 y otra base de W_2. Para determinar una base de W_1 resolvemos el sistema de ecuaciones cartesianas que lo define. Bueno, en este caso solo debemos resolver una ecuación y, para ello, expresamos la coordenada x_1 en función de las coordenadas x_2, x_3, x_4 (a las que les asignamos los parámetros α, β, γ).

$$x_1 + x_2 + x_4 = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2 - x_4 \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = \alpha, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = \gamma, \\ x_1 = -\alpha - \gamma, \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, estos cálculos nos permiten asegurar que todo vector de W_1 es de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Es decir, $B_1 = \{(-1,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es un sistema de generadores de W_1, pues todo vector de este subespacio se puede expresar como una combinación lineal los vectores de B_1. Además, si estudiamos la matriz formada (por columnas) por los vectores de B_1, aplicando operaciones elementales (eliminación gaussiana) vemos que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el rango de la matriz es tres, de donde podemos afirmar que los tres vectores de B_1 son linealmente independientes. En definitiva, tenemos que B_1 es una base de W_1.

En el caso de W_2, el cálculo de una base es más rápido al estar dado mediante ecuaciones paramétricas. En efecto, todo vector de W_2 se puede expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 2t \\ 3s \\ s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } s,t \in \mathbb{R}.$$

Así, $B_2 = \{(1,0,3,1),(0,2,0,1)\}$ es un sistema de generadores de W_2, pues todo vector de este subespacio se puede expresar como una combinación lineal los vectores de B_2. Ahora analicemos la matriz formada por los vectores de B_2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir que los vectores de B_2 son linealmente independientes (pues tenemos dos vectores y el rango de la matriz asociada es dos) y, por tanto, B_2 es una base de W_2.

Para finalizar el apartado resta comprobar que

$$B_1 \cup B_2 = \{(-1,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1),(1,0,3,1),(0,2,0,1)\}$$

es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^4$. Para ello veremos que los vectores de $B_1 \cup B_2$ contienen una base de $\mathbb{R}^4$, es decir, que la matriz formada por los vectores tiene rango igual a cuatro. Nuevamente formaremos la matriz tomando los vectores por columna.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observación. Supongamos que nos pidieran determinar qué vector podemos quitar para quedarnos con una base de $\mathbb{R}^4$. En este caso es mejor formar la matriz tomando los vectores por fila. Veámoslo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta el cambio de filas que hemos hecho entre la tercera y cuarta matrices, concluimos que podemos eliminar el segundo vector, es decir,

$$B = \{(-1,1,0,0),(-1,0,0,1),(1,0,3,1),(0,2,0,1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Para hallar $W_1 \cap W_2$ tomamos un vector genérico $v = (a,b,c,d)$ y le imponemos que pertenezca tanto a W_1 como a W_2.

$$\left.\begin{array}{c} v \in W_1 \Rightarrow a+b+d=0 \\ v \in W_2 \Rightarrow a=s,\ b=2t,\ c=3s,\ d=s+t \end{array}\right\} \Longrightarrow s+2t+(s+t)=0 \Longrightarrow 2s+3t=0 \Longrightarrow$$

$$t = -\frac{2s}{3} \Longrightarrow v = \left(s, -2\frac{2s}{3}, 3s, s-\frac{2s}{3}\right) = \left(s, -\frac{4s}{3}, 3s, \frac{s}{3}\right) = \frac{s}{3}(3,-4,9,1).$$

Por tanto, vemos que todos los vectores de $W_1 \cap W_2$ son múltiplos del vector $(3,-4,9,1)$. Como dicho vector es no nulo, entones es linealmente independiente y podemos asegurar que $B^* = \{(3,-4,9,1)\}$ es una base de $W_1 \cap W_2$. De paso, es claro que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ con dimensión igual a uno, es decir, $W_1 \cap W_2$ es una recta vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Sobre aproximaciones discretas por mínimos cuadrados

Enunciado

Considera la función $f(x)$ de la que solo conocemos los valores siguientes:

$$f(1)=2,\ f(3)=4,\ f(5)=9,\ f(7)=3.$$

Calcula la mejor aproximación por mínimos cuadrados de $f(x)$ en el espacio de funciones

$$\mathbb{P} = \{ax+bx^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Resolución

En este tipo de ejercicios el primer paso es determinar el subespacio vectorial en el que se aproxima, el vector que va a ser aproximado y el producto escalar considerado. Esto es así porque, en realidad, el objetivo no es otro que el cálculo de la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

Empezamos viendo cuál es el subespacio vectorial en el que se aproxima. A partir del enunciado, buscamos la aproximación en el conjunto $\mathbb{P}$ formado por los polinomios, de grado menor o igual que dos, tales que su término independiente es cero. Es claro que este conjunto es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones continuas. En efecto, todos las funciones polinómicas son continuas y, además,

- la suma de dos polinomios cualesquiera de $\mathbb{P}$ sigue estando en $\mathbb{P}$;
- el producto de cualquier polinomio de $\mathbb{P}$ por un escalar (esto es, un número real) cualquiera sigue estando en $\mathbb{P}$.

Con respecto al vector que queremos aproximar, en este ejercicio es una función $f(x)$, que supondremos continua (esta es una hipótesis que no es necesaria para los cálculos pero sí para establecer el marco teórico), de la que solo conocemos cuatro valores, a saber, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$. Por consiguiente, podemos considerar que $f(x)$ viene representada por el vector $(f(1), f(3), f(5), f(7)) = (2,4,9,3)$.

Por último, necesitamos determinar el producto escalar. En este ejercicio en particular, el hecho de solo conocer unos cuantos valores (de la función a aproximar) nos conduce a *reinterpretarlo* en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Pero, en tal caso, ¿cuál es el subespacio vectorial? Bien, ya que $B = \{x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}$ (no es difícil comprobar que todos los polinomios de $\mathbb{P}$ son combinaciones lineales de x y x^2; además, es claro que x^2 no es un múltiplo de x, ni x lo es de x^2, por lo que ambos son linealmente independientes), tanto x como x^2 podríamos representarlos por sus valores en $1, 3, 5, 7$. Es decir,

$$x \to (1,3,5,7), \quad x^2 \longrightarrow (1,9,25,49).$$

Así pues, teniendo en cuenta la definición 7.1, el resultado 7.2 y la definición 7.3 del tema 2, el ejercicio original se transforma en el siguiente ejercicio auxiliar:

Con el producto escalar usual de vectores, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (2,4,9,3) \in \mathbb{R}^4$ *sobre el subespacio vectorial* $U = L(\{(1,3,5,7),(1,9,25,49)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Para resolver el ejercicio auxiliar, denotemos por u a la proyección ortogonal de v sobre U y sean los vectores $u_1 = (1,3,5,7)$, $u_2 = (1,9,25,49)$ de una base de U (sería conveniente probar que $B = \{u_1, u_2\}$ es efectivamente una base).

A partir la definición 7.1 (y recordando que un vector w es ortogonal a un subespacio vectorial U si, y solo si, w es ortogonal a todos los vectores de una base de U), tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} u \in U \Longrightarrow u = \alpha u_1 + \beta u_2 \\ (v-u) \perp U \Longrightarrow \langle v-u, u_1\rangle = \langle v-u, u_2\rangle = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \langle v - \alpha u_1 - \beta u_2, u_1\rangle = \langle v, u_1\rangle - \alpha\langle u_1, u_1\rangle - \beta\langle u_2, u_1\rangle = 0 \\ \langle v - \alpha u_1 - \beta u_2, u_2\rangle = \langle v, u_2\rangle - \alpha\langle u_1, u_2\rangle - \beta\langle u_2, u_2\rangle = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \langle v, u_1\rangle = \alpha\langle u_1, u_1\rangle + \beta\langle u_2, u_1\rangle \\ \langle v, u_2\rangle = \alpha\langle u_1, u_2\rangle + \beta\langle u_2, u_2\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 80 = 84\alpha + 496\beta \\ 410 = 496\alpha + 3108\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = \frac{5660}{1882} \\ \beta = \frac{-655}{1882} \end{array}\right\}.$$

Por tanto, la proyección ortogonal de $v = (2,4,9,3)$ sobre $U = L(\{(1,3,5,7),(1,9,25,49)\})$ viene dada por el vector

$$u = \frac{5660}{1882}(1,3,5,7) - \frac{655}{1882}(1,9,25,49) = \left(\frac{5005}{1882}, \frac{11085}{1882}, \frac{11925}{1882}, \frac{7525}{1882}\right).$$

Pero no olvidemos que nuestro objetivo era el ejercicio original. Bien, recordando que

- el vector v representa a la función $f(x)$,
- el subespacio $U = L(\{(1,3,5,7),(1,9,25,49)\})$ representa al subespacio $\mathbb{P} = \{ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,
- los vectores u_1, u_2 (que forman una base de U) representan a las funciones x, x^2 (que forman una base de $\mathbb{P}$),

entonces concluimos que $u = \frac{5660}{1882}u_1 - \frac{655}{1882}u_2$ representará a la proyección ortogonal de $f(x)$ sobre $\mathbb{P} = \{ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Esto es, el polinomio

$$p(x) = \frac{5660}{1882}x - \frac{655}{1882}x^2$$

será la proyección ortogonal de $f(x)$ sobre $\mathbb{P} = \{ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ o, equivalentemente, será la mejor aproximación por mínimos cuadrados de $f(x)$ en el espacio de funciones $\mathbb{P} = \{ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.