Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – **Curso: 2022–2023**

Ejercicios desarrollados - Tema 3(1)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 3.1.d

Enunciado

Decide si la aplicación

$$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_0 - 3a_1, a_1),$$

entre los espacios vectoriales considerados, es lineal.

Resolución

Para comprobar que una aplicación, entre espacios vectoriales, es lineal debemos ver que se verifican las dos condiciones dadas en la Definición 1.1.

En este caso consideraremos los vectores $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ junto con el escalar real λ.

1. ¿$T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$? En efecto,

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= T((a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)) = T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2) \\ &= (a_0+b_0, (a_0+b_0) - 3(a_1+b_1), (a_1+b_1)) = (a_0, a_0-3a_1, a_1) + (b_0, b_0-3b_1, b_1) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)); \end{aligned}$$

2. ¿$T(\lambda p(x)) = \lambda T(p(x))$? En efecto,

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x)) &= T(\lambda(a_0+a_1x+a_2x^2)) = T((\lambda a_0)+(\lambda a_1)x+(\lambda a_2)x^2) \\ &= (\lambda a_0, \lambda a_0 - 3\lambda a_1, \lambda a_1) = \lambda(a_0, a_0-3a_1, a_1) = \lambda T(p(x)). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.e

Enunciado

Decide si la aplicación

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z) = (x, 8x + 2y, z + 2, 5y),$$

entre los espacios vectoriales considerados, es lineal.

Resolución

Para comprobar que una aplicación, entre espacios vectoriales, es lineal debemos ver que se verifican las dos condiciones dadas en la Definición 1.1. Sin embargo, en este caso, la tercera coordenada del vector imagen nos hace sospechar que la aplicación no va a ser lineal, por lo que es más adecuado ver si se verifican las propiedades de Propiedad 1.7. En este caso,

$$T(0,0,0) = (0,0,2,0) \neq (0,0,0,0)$$

y, por tanto, T no es lineal.

Ejercicio 3.2.d

Enunciado

Calcula unas ecuaciones paramétricas, o cartesianas, del núcleo y la imagen de las aplicación lineal

$$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_0 - 3a_1, a_1).$$

¿Es T un isomorfismo?

Resolución

Sabemos que el núcleo de T viene dado por el conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid T(p(x)) = 0\} = \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (0,0,0)\big\} \\ &= \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid (a_0, a_0 - 3a_1, a_1) = (0,0,0)\big\} \\ &= \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 = 0,\ a_0 - 3a_1 = 0,\ a_1 = 0\big\}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{N}(T)$ viene determinado por el sistema de ecuaciones (con tres incógnitas)

$$\left.\begin{array}{r} a_0 = 0 \\ a_0 - 3a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

En esta caso, tenemos que (aplicando eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así podemos afirmar que $\mathrm{N}(T)$ viene definido por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{r} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}\right\},$$

siendo este un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (pues, aunque no aparezca explícitamente, a_2 también debe ser considerada como una incógnita de dicho sistema).

En cuanto a la imagen de T, sabemos que viene definida por el conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(p(x)) \mid p(x) \in \mathbb{P}_2\} = \big\{T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \mid a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2\big\} \\ &= \{(a_0, a_0 - 3a_1, a_1) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_0(1,1,0) + a_1(0,-3,1) + a_2(0,0,0) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$, $a_2 = \gamma$, tenemos que cualquier vector $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a $\mathrm{Im}(T)$ si es de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Es conveniente observar que se ha usado que $\{(1,1,0), (0,-3,1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes (es evidente que en ningún caso uno de ellos es múltiplo del otro), mientras que $\{(1,1,0), (0,-3,1), (0,0,0)\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes (por contener al vector cero).

Por tanto, $\mathrm{Im}(T)$ viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{r} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha - 3\beta \\ y_3 = \beta \end{array}\right\}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por último, para comprobar que T no es un isomorfismo, en este caso es suficiente ver que T no es un monomorfismo, es decir, basta con observar que $\mathrm{N}(T) \neq \{0\}$. Para ello, a partir de las cartesianas de $\mathrm{N}(T)$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \big\{\lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\big\} \Rightarrow \mathrm{N}(T) \neq \{0\}.$$

Ejercicio 3.3

Enunciado

Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$?

b) ¿Es cierto que toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo?

c) ¿Hay algún isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{M}_2$?

d) ¿Es posible definir un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$?

Resolución (usando exclusivamente la Sección 2 del Tema 3)

a) Supongamos que existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$, es decir, que podemos definir

$$T(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z, a_4x + b_4y + c_4z),$$

con $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, tal que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$ (es decir, T es un epimorfismo).

Antes de ver si T puede ser un epimorfismo, comprobemos que T es efectivamente una aplicación lineal entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

1. $T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$

   $(a_1(x_1 + x_2) + b_1(y_1 + y_2) + c_1(z_1 + z_2), a_2(x_1 + x_2) + b_2(y_1 + y_2) + c_2(z_1 + z_2),$
   $a_3(x_1 + x_2) + b_3(y_1 + y_2) + c_3(z_1 + z_2), a_4(x_1 + x_2) + b_4(y_1 + y_2) + c_4(z_1 + z_2)) =$

   $(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1, a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1, a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1, a_4x_1 + b_4y_1 + c_4z_1) +$
   $(a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2, a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2, a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2, a_4x_2 + b_4y_2 + c_4z_2) =$

   $T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2);$

2. $T(\lambda(x, y, z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) =$

   $(a_1(\lambda x) + b_1(\lambda y) + c_1(\lambda z), a_2(\lambda x) + b_2(\lambda y) + c_2(\lambda z),$
   $a_3(\lambda x) + b_3(\lambda y) + c_3(\lambda z), a_4(\lambda x) + b_4(\lambda y) + c_4(\lambda z)) =$

   $(\lambda(a_1x + b_1y + c_1z), \lambda(a_2x + b_2y + c_2z), \lambda(a_3x + b_3y + c_3z), \lambda(a_4x + b_4y + c_4z)) =$

   $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z, a_4x + b_4y + c_4z) = \lambda T(x, y, z).$

Veamos ya si T puede ser un epimorfismo.

$$T(x, y, z) = x(a_1, a_2, a_3, a_4) + y(b_1, b_2, b_3, b_4) + z(c_1, c_2, c_3, c_4), \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\mathrm{Im}(T) = L\{(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4)\}.$$

Por tanto $\mathrm{Im}(T)$ tiene un sistema de generadores formado por tres vectores, es decir, la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ es menor o igual que tres (dependiendo de la lineal independencia de tales vectores). En consecuencia, T no puede ser un epimorfismo (esto es, $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^4$) para cualquier T definida entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

b) Consideremos la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Primero comprobamos que es lineal. Para ello, por la Definición 1.1,

1. $T((x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, 0, 0) = (x_1, 0, 0)+(x_2, 0, 0) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2);$
2. $T(\lambda(x, y, z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, 0, 0) = \lambda(x, 0, 0) = \lambda T(x, y, z).$

Ahora calculamos su núcleo.

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=0\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,0,0)=(0,0,0)\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\right\} = \{(0,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}\,.\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{N}(T)\neq 0$, de donde T no es un monomorfismo, lo que implica que T no es un isomorfismo.

Por supuesto, también hay aplicaciones lineales $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que son isomorfismos. Un ejemplo viene dado por $T(x,y,z)=(x,y,z)$ (¡compruébese que realmente es un isomorfismo!)

c) Consideremos la aplicación $T:\mathbb{R}^4\to\mathcal{M}_2$ definida por

$$T(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}.$$

En primer lugar comprobamos que T es lineal. En efecto,

1. $T((a_1,a_2,a_3,a_4)+(b_1,b_2,b_3,b_4)) = T(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4) = \begin{pmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix} = T(a_1,a_2,a_3,a_4)+T(b_1,b_2,b_3,b_4)$;
2. $T(\lambda(a_1,a_2,a_3,a_4)) = T(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3,\lambda a_4) = \begin{pmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2\\ \lambda a_3 & \lambda a_4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix} = \lambda T(a_1,a_2,a_3,a_4)$.

Ahora veremos que es un isomorfismo por medio del Resultado 2.13.

- $$\begin{aligned}\mathrm{N}(T) &= \left\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4 \mid T(a_1,a_2,a_3,a_4)=0\right\}\\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4 \mid a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=0\right\}\\ &= \{(0,0,0,0)\} \Rightarrow T \text{ es un monomorfismo.}\end{aligned}$$
- $\mathrm{Im}(T) = \left\{T(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid (a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\,\middle|\, a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\right\} = \mathcal{M}_2 \Rightarrow$ T es un epimorfismo.

Al ser T monomorfismo y epimorfismo, concluimos que es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{M}_2$.

d) Supongamos que existiera un isomorfismo T entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$. En tal caso T debería ser un epimorfismo, es decir, se tendría que verificar que $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{P}_3$.

Bien, supongamos que existe un isomorfismo $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{P}_3$ definido por

$$T(a,b,c) = (\alpha_0 a+\beta_0 b+\gamma_0 c)+(\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c)x+(\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c)x^2+(\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c)x^3,$$

con $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathbb{R}$.

Una vez comprobado que T es efectivamente una aplicación lineal (¡hágase!), hallemos su imagen.

$T(a,b,c) = a(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3)+b(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3)+c(\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3)$, con $a,b,c\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\mathrm{Im}(T) = L\left\{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3, \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3, \gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3\right\}.$

Por tanto $\mathrm{Im}(T)$ tiene un sistema de generadores formado por tres vectores, es decir, la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ es menor o igual que tres (dependiendo de la lineal independencia de tales vectores). Consecuentemente, T no puede ser un epimorfismo (esto es, $\mathrm{Im}(T)\neq\mathbb{P}_3$) para cualquier T definida entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$.

Así concluimos que no es posible definir un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$.

Resolución (con ayuda de la Subsección 3.3 del Tema 3)

a) Por el Resultado 3.5 sabemos que, si $T : V \to W$ es una aplicación lineal (entre los espacios vectoriales V y W) entonces
$$\dim V = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$
En este caso, $V = \mathbb{R}^3$, por lo que
$$\dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3 - \dim \mathrm{N}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) \leq 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$
Por tanto, no es posible que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$.

b) En este caso, la subsección 3.3 no permite simplificar el razonamiento anteriormente visto.

c) Puesto que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{M}_2 = 4$, si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2$ es una aplicación lineal entonces, gracias al Resultado 3.5, se verifica que
$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{N}(T) = 4 - \dim \mathrm{N}(T) = 4 = \dim \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{N}(T) = 0.$$
Como todas las igualdades anteriores son posibles, concluimos que es factible construir un isomorfismo entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{M}_2$.

Para completar el ejercicio, sería conveniente dar un isomorfismo concreto. Por ejemplo, el visto anteriormente, pero ahora solo sería necesario determinar la dimensión del núcleo o de la imagen.

d) Supongamos que existe un isomorfismo T entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$. A partir del Resultado 3.5 tenemos que
$$\dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3 - \dim \mathrm{N}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) \leq 3 < 4 = \dim \mathbb{P}_3.$$
Por tanto, no es posible que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_3$, es decir, no existen isomorfismos entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3$.

Ejercicio 3.4

Enunciado

Sea $\mathbb{P}_5$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que cinco. Consideramos la aplicación $T : \mathbb{P}_5 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(p) = \left(p(0), p(1), \int_0^1 p(x)\,dx \right).$$

a) Demuestra que T es lineal.

b) Determina las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y la imagen de T.

c) Indica si T es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Resolución

a) Por la Definición 1.1,

1. $$\begin{aligned} T(p+q) &= \left((p+q)(0), (p+q)(1), \textstyle\int_0^1 (p+q)(x)\,dx \right) \\ &= \left(p(0)+q(0), p(1)+q(1), \textstyle\int_0^1 (p(x)+q(x))\,dx \right) \\ &= \left(p(0), p(1), \textstyle\int_0^1 p(x)\,dx \right) + \left(q(0), q(1), \textstyle\int_0^1 q(x)\,dx \right) = T(p) + T(q); \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} T(\lambda p) &= \left((\lambda p)(0), (\lambda p)(1), \textstyle\int_0^1 (\lambda p)(x)\,dx \right) = \left(\lambda p(0), \lambda p(1), \lambda \textstyle\int_0^1 p(x)\,dx \right) \\ &= \lambda \left(p(0), p(1), \textstyle\int_0^1 p(x)\,dx \right) = \lambda T(p). \end{aligned}$$

b) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ (con $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$) un polinomio cualquiera de $\mathbb{P}_5$. Entonces $p(x)$ pertenece a $\mathrm{N}(T)$ si, y solo si,

$$\begin{aligned}
T(p(x)) &= \Big(p(0), p(1), \textstyle\int_0^1 p(x)\,dx\Big)\\
&= \Big(a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \textstyle\int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5)\,dx\Big)\\
&= \left(a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \left[a_0x + a_1\tfrac{x^2}{2} + a_2\tfrac{x^3}{3} + a_3\tfrac{x^4}{4} + a_4\tfrac{x^5}{5} + a_5\tfrac{x^6}{6}\right]_0^1\right)\\
&= \Big(a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, a_0 + \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{1}{4}a_3 + \tfrac{1}{5}a_4 + \tfrac{1}{6}a_5\Big) = (0,0,0),
\end{aligned}$$

de donde,

$$\left.\begin{array}{c}
a_0 = 0\\
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\\
a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{6}a_5 = 0
\end{array}\right\}$$

son unas ecuaciones cartesianas de $\mathrm{N}(T)$. Para obtener unas paramétricas, resolvemos el sistema (formado por tales cartesianas) mediante eliminación gaussiana.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{5} & \frac{-2}{3} & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} & 2 & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-4}{5} & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} & 2 & 0
\end{array}\right).$$

Ahora, tomando $a_3 = 2\alpha$, $a_4 = 5\beta$ y $a_5 = \gamma$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{c}
a_0 = 0\\
a_1 = \alpha + 4\beta + \gamma\\
a_2 = -3\alpha - 9\beta - 2\gamma\\
a_3 = 2\alpha\\
a_4 = 5\beta\\
a_5 = \gamma
\end{array}\right\}, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

son unas ecuaciones paramétricas de $\mathrm{N}(T)$.

Aprovechando los cálculos realizados para el núcleo de T, vamos a determinar las ecuaciones de la imagen de T. Así, a partir de la expresión de T en coordenadas hallada antes, un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a la imagen de T si es de la forma

$$(x, y, z) = \left(a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{6}a_5\right).$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = a_0\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + a_5\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im}(T) = L\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right\} = L\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3,$$

ya que $(1, 1, 1)$, $(0, 1, \frac{1}{2})$ y $(0, 1, \frac{1}{3})$ son tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y, en consecuencia, una base suya (¡pruébese la independencia lineal de dichos vectores!).

Ya que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, podemos afirmar que unas ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$ son

$$\left.\begin{array}{c}
x = \alpha\\
y = \beta\\
z = \gamma
\end{array}\right\}, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

mientras que la cartesiana es $0 = 0$.

c) Por lo visto en el apartado anterior,

- T no es un monomorfismo (inyectiva) pues $\mathrm{N}(T) \neq \{0\}$. Por ejemplo, $p(x) = x - 2x^2 + x^5$ pertenece al núcleo de T (basta tomar $\alpha = \beta = 0$ y $\gamma = 1$ en las paramétricas del núcleo);
- T es un epimorfismo (sobreyectiva) pues $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$;
- T no es un isomorfismo (biyectiva) pues, aún siendo un epimorfismo, no es un monomorfismo.

Ejercicio 3.5

Enunciado

Define, si es posible, una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}.$$

Resolución

Sabemos que, cuando una aplicación lineal T viene expresada en coordenadas, para obtener las ecuaciones cartesianas de $\mathrm{N}(T)$ basta con igualar a cero cada una de las coordenadas del vector imagen (tal como se vio en los Ejemplos 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6). Según esto, necesitamos una aplicación lineal de forma que las tres coordenadas, del vector imagen, igualadas a cero den lugar a la única ecuación cartesiana $2x - y + z = 0$.

Tres posibles ejemplos son los siguientes:

- $T(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$.
- $T(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 4x - 2y + 2z)$.
- $T(x, y, z) = (-2x + y - z, x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, 4x - 2y + 2z)$.

Analicemos en detalle el ejemplo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 4x - 2y + 2z)$. Empezamos viendo que efectivamente es una aplicación lineal.

1. $$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), 0, 4(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)) \\ &= (2x_1 - y_1 + z_1, 0, 4x_1 - 2y_1 + 2z_1) + (2x_2 - y_2 + z_2, 0, 4x_2 - 2y_2 + 2z_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} T(\lambda(x, y, z)) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y + \lambda z, 0, 4\lambda x - 2\lambda y + 2\lambda z) \\ &= \lambda(2x - y + z, 0, 4x - 2y + 2z) = \lambda T(x, y, z). \end{aligned}$$

Ahora determinamos el núcleo de T.

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x - y + z, 0, 4x - 2y + 2z) = (0, 0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0,\ 0 = 0,\ 4x - 2y + 2z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que

- la ecuación $0 = 0$ se puede eliminar pues no aporta nada al sistema de ecuaciones que determina al núcleo;
- la ecuación $4x - 2y + 2z = 0$ es el doble de la ecuación $2x - y + z = 0$, por lo que se puede eliminar al tener ambas el mismo conjunto de soluciones.

Ejercicio 3.6

Enunciado

Define, si es posible, una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}.$$

Resolución

Sabemos que, cuando una aplicación lineal T viene expresada en coordenadas, para obtener las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$ basta con igualar un vector genérico del espacio final con el vector imagen, tomando las coordenadas de este como parámetros (tal como se vio en los Ejemplos 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6). Según esto, una posibilidad para resolver este ejercicio es hallar unas ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$ a partir de la cartesiana dada por el enunciado y, posteriormente, definir una aplicación lineal adecuada.

A partir del enunciado,

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x + z\right\} = \{(x, 2x + z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\},$$

de donde deducimos que

$$\left.\begin{aligned} a &= x \\ b &= 2x + z \\ c &= z \end{aligned}\right\}$$

son ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$ (siendo a, b, c las coordenadas y x, y, z los parámetros). Por consiguiente, parece que la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, 2x + z, z)$$

es una respuesta al ejercicio. Empezaremos viendo que realmente esta aplicación T es lineal.

1. $T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), (z_1 + z_2))$
   $= (x_1, 2x_1 + z_1, z_1) + (x_2, 2x_2 + z_2, z_2) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$.
2. $T(\lambda(x, y, z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x, 2\lambda x + \lambda z, \lambda z) = \lambda(x, 2x + z, z) = \lambda T(x, y, z)$.

Ahora, puesto que

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \{(x, 2x + z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\},$$

es claro que la aplicación T cumple con la condición exigida.

Ejercicio 3.7

Enunciado

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $T(1, 0) = (1, 2, 3)$ y $T(0, 1) = (-4, 0, 5)$. Calcula $T(2, 4)$ y $T(-3, 7)$.

Resolución

Es claro que $(2, 4) = 2(1, 0) + 4(0, 1)$ y que $(-3, 7) = -3(1, 0) + 7(0, 1)$. Por tanto, a partir de la linealidad de T, tenemos que

- $T(2, 4) = T(2(1, 0) + 4(0, 1)) = T(2(1, 0)) + T(4(0, 1)) = 2T(1, 0) + 4T(0, 1)$
  $= 2(1, 2, 3) + 4(-4, 0, 5) = (2, 4, 6) + (-16, 0, 20) = (-14, 4, 26)$.
- $T(-3, 7) = T(-3(1, 0) + 7(0, 1)) = T(-3(1, 0)) + T(7(0, 1)) = (-3)T(1, 0) + 7T(0, 1)$
  $= (-3)(1, 2, 3) + 7(-4, 0, 5) = (-3, -6, -9) + (-28, 0, 35) = (-31, -6, 26)$.

Ejercicio 3.8

Enunciado

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $T(1,1,0) = (1,2)$, $T(1,-1,1) = (4,-5)$ y $T(0,0,1) = (-4,0)$. Calcula $T(-2,4,-5)$ y $T(3,0,7)$.

Resolución

Primero tenemos que comprobar si podemos expresar los vectores $(-2,4,-5)$ y $(3,0,7)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$, $(1,-1,1)$ y $(0,0,1)$. Empezamos con $(-2,4,-5)$.

$$(-2,4,-5) = a(1,1,0) + b(1,-1,1) + c(0,0,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-2 \\ a-b=4 \\ b+c=-5 \end{array}\right\}$$

Aplicando eliminación gaussiana en el sistema obtenido,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

De donde $(-2,4,5) = (1,1,0) - 3(1,-1,1) - 2(0,0,1)$.

Continuamos con $(3,0,7)$.

$$(3,0,7) = a(1,1,0) + b(1,-1,1) + c(0,0,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=3 \\ a-b=0 \\ b+c=7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} \end{array}\right).$$

O sea, $(3,0,7) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{3}{2}(1,-1,1) + \frac{11}{2}(0,0,1)$.

Finalmente, a partir de la linealidad de T, tenemos que

- $T(-2,4,5) = T\left((1,1,0) - 3(1,-1,1) - 2(0,0,1)\right) = T\left(1,1,0\right) + T\left(-3(1,-1,1)\right) + T\left(-2(0,0,1)\right)$
  $= T(1,1,0) + (-3)T(1,-1,1) + (-2)T(0,0,1) = (1,2) + (-3)(4,-5) + (-2)(-4,0)$
  $= (1,2) + (-12,15) + (8,0) = (-3,17)$.
- $T(3,0,7) = T\left(\frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{3}{2}(1,-1,1) + \frac{11}{2}(0,0,1)\right) = T\left(\frac{3}{2}(1,1,0)\right) + T\left(\frac{3}{2}(1,-1,1)\right) + T\left(\frac{11}{2}(0,0,1)\right)$
  $= \frac{3}{2}T(1,1,0) + \frac{3}{2}T(1,-1,1) + \frac{11}{2}T(0,0,1) = \frac{3}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(4,-5) + \frac{11}{2}(-4,0)$
  $= \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{2}\right) + \left(\frac{12}{2}, \frac{-15}{2}\right) + \left(\frac{-44}{2}, 0\right) = \left(\frac{-29}{2}, \frac{-9}{2}\right).$