Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 3(2)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 3.9

Los cinco apartados de este ejercicio van a ser resueltos sin un patrón fijo. Es conveniente revisar las cinco resoluciones y comprobar cómo un mismo problema puede ser abordado desde distintas perspectivas, en especial cuando se pueden aprovechar las particularidades de los datos dados en cada caso.

En algunos casos usaremos la siguiente propiedad: si V es un espacio vectorial y B_1 y B_2 son dos bases de V, entonces las matrices de cambio $C_{B_1B_2}$ y $C_{B_2B_1}$ son una la inversa de la otra. En efecto, dando por hecho que $C_{B_1B_2}$ y $C_{B_2B_1}$ son invertibles, si $v \in V$ y v_{B_i} es su expresión en la base B_i (con $i = 1$ o 2), entonces

$$C_{B_1B_2}v_{B_1} = v_{B_2} \Rightarrow v_{B_1} = (C_{B_1B_2})^{-1}v_{B_2} = C_{B_2B_1}v_{B_2} \Rightarrow C_{B_2B_1} = (C_{B_1B_2})^{-1}.$$

Ejercicio 3.9.a

Enunciado

Determina la matriz $M(T, B_1, B_2)$ asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, x - y, z + 3x - y),$$

considerando las bases $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Resolución

Puesto que tanto B_1 como B_2 son la base canónica B_C de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)_{B_C},$$

$$(x+y, x-y, z+3x-y) = (x+y)(1, 0, 0)+(x-y)(0, 1, 0)+(3x-y+z)(0, 0, 1) = (x+y, x-y, 3x-y+z)_{B_C}.$$

Por tanto,

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_C}\right) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3x-y+z \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_C}.$$

De donde concluimos que

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.9.b

Enunciado

Determina la matriz $M(T, B_1, B_2)$ asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, x - y, z + 3x - y),$$

considerando las bases $B_1 = \{(1,2,3),(1,1,0),(0,0,4)\}$ y $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Resolución

Para hallar $M(T, B_1, B_2)$, tomamos un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ (expresado en la base B_1) y, usando la linealidad de T, calculamos su imagen (expresada en la base B_2, que es la canónica B_C).

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}\right) = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}\right) = x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_C} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_C} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_C} \Rightarrow$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}\right) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -x \\ 4x+2y+4z \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_C} \Rightarrow M(T, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.9.c

Enunciado

Determina la matriz $M(T, B_1, B_2)$ asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+y, x-y, z+3x-y),$$

considerando las bases $B_1 = B_2 = \{(1,2,3),(1,1,0),(0,0,4)\}$.

Resolución

Como B_1 y B_2 son la misma base, denotemos ambas por B. Por otra parte, en este caso la matriz $M(T,B,B)$ permite calcular la imagen (expresada en la base B) de cualquier vector (expresado en la base B).

Para empezar, vamos a considerar la matriz de T asociada a la base canónica B_C de $\mathbb{R}^3$. Pero esta matriz ya fue calculada en al apartado a),

$$M(T, B_C, B_C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tomemos la expresión

$$C_{B_C B} M(T, B_C, B_C) C_{B B_C} v_B,$$

donde $C_{B_C B}$ es la matriz de cambio de la base B_C a la base B, $C_{B B_C}$ es la matriz de cambio de la base B a la base B_C, y v_B es un vector cualquiera v de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B. Entonces,

- $C_{B B_C} v_B$ es el vector v expresado en la base B_C, es decir, $C_{B B_C} v_B = v_{B_C}$;
- $M(T, B_C, B_C) v_{B_C}$ es la imagen expresada en la base B_C de v expresado en la base B_C, es decir, $M(T, B_C, B_C) v_{B_C} = (T(v))_{B_C}$;
- $C_{B_C B}(T(v))_{B_C}$ es el vector $T(v)$ expresado en la base B, es decir, $C_{B_C B}(T(v))_{B_C} = (T(v))_B$.

En resumen,

$$C_{B_C B} M(T, B_C, B_C) C_{B B_C} v_B = C_{B_C B} M(T, B_C, B_C) v_{B_C} = C_{B_C B}(T(v))_{B_C} = (T(v))_B,$$

esto es, $C_{B_C B} M(T, B_C, B_C) C_{B B_C}$ es la matriz $M(T,B,B)$ buscada.

Así pues, necesitamos hallar $C_{B_C B}$ y C_{BB_C}. Para ello, calculamos primero C_{BB_C} y después, teniendo en cuenta que estas dos matrices son una la inversa de la otra, calcularemos $C_{B_C B}$. Bien, teniendo en cuenta que las coordenadas de un vector son precisamente sus coordenadas en la base canónica,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_C} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_C} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right)_{B_C},$$

concluimos que

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

y, consecuentemente,

$$C_{B_C B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Por último,

$$M(T,B,B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.9.d

Enunciado

Determina la matriz $M(T, B_1, B_2)$ asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x,y,z) = y - \frac{1}{2}z,$$

considerando las bases $B_1 = \{(0,4,4),(5,0,5),(2,4,0)\}$ y $B_2 = \{4\}$.

Resolución

Consideremos un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$ expresado en la base B_1, esto es, $v = (x,y,z)_{B_1}$. Por la linealidad de T sabemos que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}\right) = xT\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}\right) + yT\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}\right) + zT\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}\right) = xT\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}\right) = 2x - \frac{5}{2}y + 4z = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-5}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1}.$$

En este momento, la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-5}{2} & 4 \end{pmatrix}$ representa a $T(v)$ cuando el vector v está expresado en la base B_1 de $\mathbb{R}^3$ y el resultado es un número real sin más. Pero, como para cualquier número real a se verifica que $a = a \cdot 1$, podemos asegurar que las coordenadas de a en la base canónica de $\mathbb{R}$ (a saber, la base $B_C = \{1\}$) son justamente dicho valor a, es decir,

$$a = (a)_{B_C},\ \text{para todo número real } a \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, ahora mismo tenemos que

$$M(T, B_1, B_C) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-5}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo nos han pedido $M(T, B_1, B_2)$, siendo B_2 la base de $\mathbb{R}$ dada por $B_2 = \{4\}$. Ahora bien, como $a = \frac{a}{4} \cdot 4$, entonces tenemos que

$$a = \left(\frac{a}{4}\right)_{B_2},\ \text{para todo número real } a \in \mathbb{R}.$$

A partir de aquí,

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B_1}\right) = 2x-\frac{5}{2}y+4z = \left(\frac{2x-\frac{5}{2}y+4z}{4}\right)_{B_2} = \left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}y+z\right)_{B_2} = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-5}{8} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B_1}\right)_{B_2},$$

y podemos concluir que

$$M(T,B_1,B_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-5}{8} & 1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.9.e

Enunciado

Determina la matriz $M(T,B_1,B_2)$ asociada a la aplicación lineal

$$T:\mathbb{P}_2\to\mathbb{R}^2,\ T(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0+2a_1, a_2+3a_1),$$

considerando las bases $B_1=\{x^2-2, x+1, 3x^2+5x\}$ y $B_2=\{(1,2),(3,4)\}$.

Resolución

Consideremos un polinomio $p(x)=(\alpha,\beta,\gamma)_{B_1}$ de grado menor o igual que 2 y expresado en la base B_1, es decir,

$$p(x)=\alpha(x^2-2)+\beta(x+1)+\gamma(3x^2+5x) = -2\alpha+\beta+(\beta+5\gamma)x+(\alpha+3\gamma)x^2.$$

Entonces, aplicando la linealidad de T, se verifica que

$$T(p(x)) = T\left((\alpha,\beta,\gamma)_{B_1}\right) = T\left(-2\alpha+\beta+(\beta+5\gamma)x+(\alpha+3\gamma)x^2\right) = \begin{pmatrix}(-2\alpha+\beta)+2(\beta+5\gamma)\\(\alpha+3\gamma)+3(\beta+5\gamma)\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T(p(x)) = T\left((\alpha,\beta,\gamma)_{B_1}\right) = \begin{pmatrix}-2\alpha+3\beta+10\gamma\\\alpha+3\beta+18\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 10\\1 & 3 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}.$$

En este momento tenemos que, si $B_C=\{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$M(T,B_1,B_C) = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 10\\1 & 3 & 18\end{pmatrix}.$$

Esto es así pues

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = \begin{pmatrix}a_0+2a_1\\a_2+3a_1\end{pmatrix} = (a_0+2a_1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(a_2+3a_1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0+2a_1\\a_2+3a_1\end{pmatrix}_{B_C}$$

y, por tanto, el vector imagen $T(a_0+a_1x+a_2x^2)$ viene expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Como queremos expresar el vector imagen $T(a_0+a_1x+a_2x^2)$ en la base $B_2=\{(1,2),(3,4)\}$, necesitamos la matriz $C_{B_CB_2}$ de cambio de B_C a B_2. Para ello primero hallaremos la matriz $C_{B_2B_C}$ de cambio de B_2 a B_C y después aplicaremos que $C_{B_CB_2}=(C_{B_2B_C})^{-1}$. Si tomamos $v=(\alpha,\beta)_{B_2}$, entonces

$$v_{B_2} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_{B_2} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+4\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+4\beta\end{pmatrix}_{B_C} = v_{B_C} \Rightarrow v_{B_C} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_{B_2} \Rightarrow$$

$$v_{B_C} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}v_{B_2} \Rightarrow C_{B_2B_C} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_CB_2} = \begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$T(p(x)) = T\left(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}\right) = \left(C_{B_CB_2}M(T,B_1,B_C)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}\right)_{B_2} = \left(\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 10\\1 & 3 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}\right)_{B_2}$$

$$\Rightarrow T\left(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}\right) = \left(\begin{pmatrix}\frac{11}{2} & \frac{-3}{2} & 7\\\frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_{B_1}\right)_{B_2} \Rightarrow M(T,B_1,B_2) = \begin{pmatrix}\frac{11}{2} & \frac{-3}{2} & 7\\\frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.11

Enunciado

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$T(1,1,1) = (-1,0,1), \;\; T(0,1,-1) = (2,1,0), \;\; T(1,0,0) = (1,1,1).$$

a) Halla la matriz asociada a T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Halla una base del núcleo.

c) Halla una base de la imagen.

Resolución

a) Es fácil comprobar que $B = \{(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ pues es un sistema de generadores compuesto por tres vectores linealmente independientes (¡hágase la comprobación!)

Aplicando la linealidad de T, si $v = (x,y,z)_B$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B, entonces

$$T(v_B) = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}_{B_C} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right)_{B_C},$$

donde B_C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, podemos concluir que

$$M(T,B,B_C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero, como nos han pedido $M(T,B_C,B_C)$, necesitamos la matriz de cambio $C_{B_C B}$ pues

$$M(T,B_C,B_C) = M(T,B,B_C)C_{B_C B}.$$

En efecto, si v_{B_C} es un vector de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base canónica,

$$M(T,B,B_C)C_{B_C B}v_{B_C} = M(T,B,B_C)v_B = (T(v_B))_{B_C} = (T(v))_{B_C}.$$

Para calcular $C_{B_C B}$, hallamos primero C_{BB_C} y después aplicamos que $C_{B_C B} = (C_{BB_C})^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_C} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_C} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right)_{B_C}$$

$$\Rightarrow C_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_C B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M(T,B_C,B_C) = M(T,B,B_C)C_{B_C B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) A partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal,

$$\mathrm{N}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0,0)\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones asociado a $\mathrm{N}(T)$,

$$\left.\begin{matrix} x - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = \lambda, \\ z = 0 \end{matrix}\right. \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \left\{(0,\lambda,0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\lambda(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Por tanto, $\{(0,1,0)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{N}(T)$ formado por vectores linealmente independientes (ya que cualquier vector no nulo es un conjunto de vectores linealmente independientes). Es decir, $B = \{(0,1,0)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$.

c) Por la definición de imagen de una aplicación lineal,

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (a,b,c) \text{ para algún } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$\left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ para algún } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} =$$

$$\left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left.\begin{matrix} x - 2z = a \\ x - z = b \\ x = c \end{matrix}\right\} \text{ es un sistema compatible} \right\}.$$

Así, analizando (mediante eliminación gaussiana) la compatibilidad del sistema de ecuaciones que define a $\mathrm{Im}(T)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & -2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 & b-c \\ 0 & 0 & -2 & a-c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right),$$

podemos concluir que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b + c = 0\}.$$

Ahora, resolviendo la ecuación que determina a $\mathrm{Im}(T)$,

$$a - 2b + c = 0 \Rightarrow a = 2b - c \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = 2\lambda - \mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{matrix}\right., \ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \{(2\lambda-\mu,\lambda,\mu) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im}(T) = \{\lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,1) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, ya que $(2,1,0)$ y $(-1,0,1)$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ (pues ninguno de los dos es múltiplo del otro), podemos afirmar que $\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(T)$ formado por vectores linealmente independientes. Es decir, $B = \{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Resolución conjunta de los apartados *b*) **y** *c*)

Este modo de resolver el ejercicio es más automática pero presenta un inconveniente relativamente importante: es algo más difícil justificar el porqué de los resultados obtenidos. De todas formas, es una manera rápida de hacer los cálculos.

Una vez resuelto el apartado *a*), podemos construir la matriz formada por

- a la derecha, los vectores (por fila) de la base canónica de $\mathbb{R}^3$,
- a la izquierda, los vectores imagen (por fila) de cada uno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Así tenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora debemos estudiar el rango de la submatriz izquierda aplicando eliminación gaussiana por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A partir de aquí podemos determinar bases de $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

- Observando la última fila de la matriz reducida, vemos que la imagen del vector $(0,1,0)$ es $(0,0,0)$. Por tanto $\{(0,1,0)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$.
- De las dos primeras filas deducimos que $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. Además se verifica que $(1,0,0)$ es un origen de $(1,1,1)$ y que $(2,0,1)$ es un origen de $(0,1,2)$.

Para hacer los cálculos no es realmente necesario usar la matriz $M(T,B_C,B_C)$. También se podrían haber realizado a partir de la matriz $M(T,B,B_C)$. Veamos cómo quedaría la resolución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

De donde,

- $\{(0,-2,0)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$;
- $\{(-1,0,1),(0,1,2)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$; además $T(1,1,1)=(-1,0,1)$ y $T(2,3,1)=(0,1,2)$.

Una vez hechos los cálculos, es más o menos claro que la idea de este método.

- Con la eliminación gaussiana por filas, en la parte izquierda de la matriz, estudiamos el rango del conjunto formado por los vectores imagen de los vectores de una base, obteniendo al final una base de la imagen de la aplicación lineal dada.

Al mismo tiempo, la eliminación gaussiana por filas, en la parte derecha de la matriz, nos permite ir teniendo nuevos vectores origen que siempre serán linealmente independientes entre sí (es decir, siempre serán una base). En particular, aquellos cuya imagen sea un vector nulo formarán una base del núcleo de la aplicación lineal dada.

Ejercicio 3.14

Enunciado

a) Encuentra una aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea

$$\mathrm{N}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\}$$

y tal que el subespacio imagen esté generado por el vector $v=(0,1,0)$.

b) Escribe la matriz asociada a T en la base canónica.

Resolución

a) Este apartado es el Ejercicio 3.5 con una condición añadida: además de ser $\mathrm{N}(T)$ un conjunto dado, también $\mathrm{Im}(T)$ ha de estar generada por un vector prefijado. Por este motivo, enfocaremos los cálculos desde una nueva perspectiva.

En primer lugar determinaremos una base de $\mathrm{N}(T)$. Para ello basta con resolver el sistema de ecuaciones cartesianas (en realidad, ecuación cartesiana) que define a $\mathrm{N}(T)$.

$$2x + y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + y \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, al ser $(1, 0, 2)$ y $(0, 1, 1)$ vectores linealmente independientes que generan a todo vector de $\mathrm{N}(T)$, se verifica que $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$.

Por otra parte, como queremos que $\{(0, 1, 0)\}$ sea una base de $\mathrm{Im}(T)$, necesitamos encontrar un vector que no esté en $\mathrm{N}(T)$ y cuya imagen sea precisamente $\{(0, 1, 0)\}$. Bien, como $\mathrm{N}(T)$ tiene dimensión dos, entonces al menos uno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ no puede pertenecer a $\mathrm{N}(T)$. En este ejercicio, cualquiera de los tres sería válido; por ejemplo, si tomamos $(1, 0, 0)$, estudiemos el rango de la matriz formada por $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$ (es decir, la matriz formada por los dos vectores de la base de $\mathrm{N}(T)$ y el añadido).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así pues $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. A partir de aquí, es claro que la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 2) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$ y $T(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ cumplirá con la exigencias del enunciado.

b) Este apartado es similar al apartado *a*) del Ejercicio 3.11, donde se ha explicado con detalle el proceso a seguir. Por tanto nos limitaremos a realizar los cálculos (¡muy conveniente!, escribir de nuevo el ejercicio incluyendo todos los comentarios necesarios).

A partir de la definición de T en función de la base $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ (y ya que la expresión en coordenadas para cualquier vector coincide con su expresión en la base canónica B_C),

$$M(T, B, B_C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como nos piden $M(T, B_C, B_C)$, necesitamos calcular la matriz de cambio $C_{B_C B}$. Para ello,

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_C B} = (C_{BB_C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M(T, B_C, B_C) = M(T, B, B_C) C_{B_C B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$