Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 3(3)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 3.12

Enunciado

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$T(-1,1,2) = (1,3,0,4), \;\; T(2,-1,2) = (1,0,-3,1), \;\; T(0,1,2) = (0,1,1,1).$$

a) Calcula la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

b) Halla una base del núcleo.

c) Determina unas ecuaciones cartesianas del subespacio imagen.

Resolución

a) Este apartado es similar al apartado *a*) del Ejercicio 3.11 visto en “Tema 3: Tarea 2”, donde se explicó con detalle el proceso a seguir. Por tanto nos limitaremos a realizar los cálculos (¡muy conveniente!, escribir de nuevo el ejercicio incluyendo todos los comentarios necesarios).

A partir de la definición de T en función de la base $B = \{(-1,1,2),(2,-1,2),(0,1,2)\}$ (y ya que la expresión en coordenadas para cualquier vector coincide con su expresión en la base canónica B_C),

$$M(T,B,B_C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como nos piden $M(T,B_C,B_C)$, necesitamos calcular la matriz de cambio C_{B_CB}. Para ello,

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_CB} = (C_{BB_C})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M(T,B_C,B_C) = M(T,B,B_C)C_{B_CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) A partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal,

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}(T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c}-x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}z=0\\ -2x-\frac{3}{2}y+\frac{5}{4}z=0\\ x+3y-z=0\\ -3x-3y+2z=0\end{array}\right\}.$$

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones asociado a $\mathrm{N}(T)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&\frac{-3}{2}&\frac{3}{4}&0\\ -2&\frac{-3}{2}&\frac{5}{4}&0\\ 1&3&-1&0\\ -3&-3&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{-3}{4}&0\\ -2&\frac{-3}{2}&\frac{5}{4}&0\\ 1&3&-1&0\\ -3&-3&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{-3}{4}&0\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&0\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&0\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{-1}{2}&0\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}x-\frac{1}{2}z=0\\ \frac{3}{2}y-\frac{1}{4}z=0\\ 0=0\\ 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\lambda\\ y=\lambda\\ z=6\lambda\end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathrm{N}(T)=\left\{\begin{pmatrix}3\lambda\\ \lambda\\ 6\lambda\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Por tanto, $\{(3,1,6)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{N}(T)$ formado por vectores linealmente independientes (ya que cualquier vector no nulo es un conjunto de vectores linealmente independientes). Es decir, $B=\{(3,1,6)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$.

c) Por la definición de imagen de una aplicación lineal,

$$\mathrm{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\ \text{para algún}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-1&\frac{-3}{2}&\frac{3}{4}\\ -2&\frac{-3}{2}&\frac{5}{4}\\ 1&3&-1\\ -3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\ \text{para algún}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left.\begin{array}{c}-x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}z=a\\ -2x-\frac{3}{2}y+\frac{5}{4}z=b\\ x+3y-z=c\\ -3x-3y+2z=d\end{array}\right\}\ \text{es un sistema compatible}\right\}.$$

Así, analizando (mediante eliminación gaussiana) la compatibilidad del sistema de ecuaciones que define a $\mathrm{Im}(T)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&\frac{-3}{2}&\frac{3}{4}&a\\ -2&\frac{-3}{2}&\frac{5}{4}&b\\ 1&3&-1&c\\ -3&-3&2&d\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{-3}{4}&-a\\ -2&\frac{-3}{2}&\frac{5}{4}&b\\ 1&3&-1&c\\ -3&-3&2&d\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{-3}{4}&-a\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&b-2a\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&c+a\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&d-3a\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{-3}{4}&-a\\ 0&\frac{3}{2}&\frac{-1}{4}&b-2a\\ 0&0&0&c-b+3a\\ 0&0&0&d-b-a\end{array}\right),$$

podemos concluir que

$$\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T)=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c}3a-b+c=0\\ a+b-d=0\end{array}\right\}.$$

Es decir, $\mathrm{Im}(T)$ tiene como ecuaciones cartesianas al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}3a-b+c=0\\ a+b-d=0\end{array}\right\}.$$

Ejercicio 3.15

Enunciado

En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal T cuya matriz asociada es

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$,

a) Calcula la matriz asociada a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) ¿Es T un isomorfismo? Razona la respuesta.

Resolución

Se recomienda releer el Ejercicio 3.9.c de "Tema 3: Tarea 2", pues allí se explicó en detalle las ideas que se aplicarán en el apartado *a*) del presente ejercicio (¡muy conveniente!, escribir de nuevo el ejercicio incluyendo todos los comentarios necesarios).

a) Si denotamos por B_C a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, sabemos que

$$M(T,B_C) = C_{BB_C} M(T,B) C_{B_C B}.$$

Por tanto, necesitamos calcular previamente C_{BB_C} y $C_{B_C B}$.

A partir de $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$, tenemos que

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_C B} = (C_{BB_C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$M(T,B_C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -7 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

b) A partir de $M(T,B_C)$ podemos hallar la expresión de T en coordenadas (recuérdese que las coordenadas de un vector cualquiera coinciden con sus coordenadas en la base canónica).

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -7 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{3}{2}z \\ 3x - 7y + 3z \\ \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{7}{2}z \end{pmatrix}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que los vectores de $\mathrm{N}(T)$ son aquellos cuya imagen es el vector cero, tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 3x - 7y + 3z = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y + \frac{7}{2}z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x - 9y + 3z = 0 \\ 3x - 7y + 3z = 0 \\ 3x - 9y + 7z = 0 \end{array}\right\}.$$

Mediante eliminación gaussiana por filas (¡hágase!), se puede comprobar que el sistema anterior es compatible determinado. Por tanto, $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$ y, en consecuencia, T es un monomorfismo. Ahora bien, sabemos que

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow 0 + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3.$$

O sea, T es un epimorfismo pues $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Puesto T es monomorfismo y epimorfismo, concluimos que es un isomorfismo.

Ejercicio 3.16.c

Enunciado

Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz de la simetría respecto a la recta $2x - y = 0$.

Resolución

Empezamos buscando un vector u_1 que sea director de la recta $2x - y = 0$ y un vector u_2 que sea perpendicular a u_1; además, tanto u_1 como u_2 deberán tener norma igual a 1.

Es claro que $(1,2)$ pertenece a la recta dada, por lo que es un vector director de la misma. Así que, normalizando, podemos tomar $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Por otra parte, puesto que $(2,-1)$ es ortogonal a $(1,2)$, podemos considerar $u_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$. Tenemos así que $B = \{u_1, u_2\}$ es un conjunto de dos vectores linealmente independientes (ninguno de ellos es múltiplo del otro) de $\mathbb{R}^2$ que, además, tienen norma 1; en consecuencia, B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Vamos a usar B para definir la simetría T buscada.

- Como la simetría es respecto a la recta $2x - y = 0$, entonces los vectores de esa recta no cambiarán; en particular, $T(u_1) = u_1$. En coordenadas respecto de la base B, $T((1,0)_B) = (1,0)_B$.
- Además, los vectores de la recta perpendicular a $2x - y = 0$ cambiarán de sentido; en particular, $T(u_2) = -u_2$. En coordenadas respecto de la base B, $T((0,1)_B) = (0,-1)_B$.

De esta forma sabemos que la matriz de la simetría T con respecto a la base B será

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pero nos han pedido la matriz de T con respecto a la base canónica B_C de $\mathbb{R}^2$, por lo que necesitamos hallar las matrices de cambio C_{BB_C} y C_{B_CB} (sobre cambio de bases en aplicaciones lineales ya se han hecho en detalle varios ejercicios, por lo que nos limitaremos a los cálculos; ¡muy conveniente!, escribir de nuevo los cálculos incluyendo todos los comentarios necesarios).

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_CB} = (C_{BB_C})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Observación: al ser B_C una base ortonormal, $(C_{BB_C})^{-1} = (C_{BB_C})^T$ (¡compruébese!).

Finalmente,

$$M(T,B_C) = C_{BB_C} M(T,B) C_{B_CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.16.d

Enunciado

Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz del giro de ángulo $\theta = \pi/3$.

Resolución

Para hallar la matriz asociada al giro T partimos de la base canónica B_C de $\mathbb{R}^2$, que es una base ortonormal. Como queremos que el ángulo del giro sea $\theta = \pi/3$, entonces

- $u_1 = (1,0)$ pasará a ser $T(1,0) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
- $u_2 = (0,1)$ pasará a ser $T(0,1) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Como u_1, u_2, $T(u_1)$ y $T(u_2)$ están expresados en la base canónica, entonces la matriz buscada es

$$M(T,B_C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.17.a

Enunciado

Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de la simetría respecto al plano $x+y+3z=0$.

Resolución

Como tenemos que T es una simetría respecto de un plano, necesitamos una base $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal y que, por ejemplo,

- $u_1,\ u_2$ pertenecen al plano dado y $T(u_1)=u_1,\ T(u_2)=u_2$, ya que los vectores del plano de simetría quedan fijos por la simetría respecto de ese plano;
- u_3 es ortogonal al plano de simetría y $T(u_3)=-u_3$, ya que la recta perpendicular al plano de simetría cambia de sentido por la simetría respecto de ese plano.

Así, empezamos calculando una base ortonormal del plano vectorial π dado por $x+y+3z=0$.

$$x+y+3z=0 \Rightarrow z=-\frac{x+y}{3} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\alpha,\beta,-\frac{\alpha+\beta}{3}\right)=\alpha\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)+\beta\left(0,1,\frac{-1}{3}\right).$$

Por tanto, $\{w_1,w_2\}=\left\{\left(1,0,\frac{-1}{3}\right),\left(0,1,\frac{-1}{3}\right)\right\}$ es una base del plano π. Para hallar una base ortogonal, aplicamos Gram-Schmidt.

- $v_1=w_1=\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)$.
- $v_2=w_2+\alpha v_1$ tal que $\langle v_2,v_1\rangle=0$. Luego,

$$\langle v_2,v_1\rangle=\langle w_2+\alpha v_1,v_1\rangle=\langle w_2,v_1\rangle+\alpha\langle v_1,v_1\rangle=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{\langle w_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}=-\frac{\langle\left(0,1,\frac{-1}{3}\right),\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)\rangle}{\langle\left(1,0,\frac{-1}{3}\right),\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)\rangle} \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{-1}{10} \Rightarrow v_2=w_2+\alpha v_1=\left(0,1,\frac{-1}{3}\right)-\frac{1}{10}\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{10},1,\frac{-3}{10}\right).$$

Y, ahora, ortonormalizamos.

- $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)}{\left\|\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)\right\|}=\frac{\left(1,0,\frac{-1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{10}}{3}}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},0,\frac{-1}{\sqrt{10}}\right).$
- $u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{\left(\frac{-1}{10},1,\frac{-3}{10}\right)}{\left\|\left(\frac{-1}{10},1,\frac{-3}{10}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{-1}{10},1,\frac{-3}{10}\right)}{\frac{\sqrt{110}}{10}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\frac{10}{\sqrt{110}},\frac{-3}{\sqrt{110}}\right).$

Para el tercer vector, es claro que $v_3=(1,1,3)$ es ortogonal a v_1 y v_2, por lo que podemos considerar $u_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\frac{(1,1,3)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right).$

Por tanto, la matriz de la simetría T con respecto a la base $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ será

$$M(T,B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Pero nos han pedido la matriz de T con respecto a la base canónica B_C de $\mathbb{R}^3$, por lo que necesitamos hallar las matrices de cambio C_{BB_C} y C_{B_CB} (sobre cambio de bases en aplicaciones lineales ya se han hecho en detalle varios ejercicios, por lo que nos limitaremos a los cálculos; ¡muy conveniente!, escribir de nuevo los cálculos incluyendo todos los comentarios necesarios).

$$C_{BB_C}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{-1}{\sqrt{110}}&\frac{1}{\sqrt{11}}\\0&\frac{10}{\sqrt{110}}&\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{-1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{110}}&\frac{3}{\sqrt{11}}\end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_CB}=(C_{BB_C})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{-1}{\sqrt{110}}&\frac{1}{\sqrt{11}}\\0&\frac{10}{\sqrt{110}}&\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{-1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{110}}&\frac{3}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}&0&\frac{-1}{\sqrt{10}}\\\frac{-1}{\sqrt{110}}&\frac{10}{\sqrt{110}}&\frac{-3}{\sqrt{110}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}&\frac{1}{\sqrt{11}}&\frac{3}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}.$$

Observación: al ser B_C una base ortonormal, $(C_{BB_C})^{-1}=(C_{BB_C})^T$ (¡compruébese!).

Finalmente,

$$M(T, B_C) = C_{BB_C} M(T, B) C_{B_C B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{110}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{10}{\sqrt{110}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{110}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{110}} & \frac{10}{\sqrt{110}} & \frac{-3}{\sqrt{110}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M(T, B_C) = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-6}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-6}{11} \\ \frac{-6}{11} & \frac{-6}{11} & \frac{-7}{11} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.17.c

Enunciado

Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de la simetría respecto al plano generado por los vectores $(2, 1, -1)$ y $(1, 1, 0)$.

Resolución

Este ejercicio es similar al Ejercicio 3.17.a, pero con una ventaja importante: ya conocemos una base del plano de simetría (que denotaremos por π). En efecto, $\{w_1, w_2\} = \{(2, 1, -1), (1, 1, 0)\}$ es una base del plano π pues son dos vectores linealmente independientes (ninguno de ellos es múltiplo del otro).

Sin embargo, nos falta un vector director w_3 de la recta perpendicular al plano π. Como w_3 debe ser ortogonal a w_1 y w_2, podemos calcularlo. Efectivamente, si $w_3 = (x, y, z)$ entonces

$$\left.\begin{matrix} \langle w_1, w_3 \rangle = 0 \\ \langle w_1, w_3 \rangle = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = \lambda \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda \end{matrix}\right. \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow w_3 = (1, -1, 1).$$

Para hablar de isometrías lineales es más adecuado tomar bases ortonormales. Ya sabemos que w_3 es ortogonal a w_1 y w_2, pero $w - 1$ y w_2 no son ortogonales entre sí. Por tanto, aplicando Gram-Schmidt vamos a ortogonalizar w_1 y w_2.

- $v_1 = w_1 = (2, 1, -1)$.
- $v_2 = w_2 + \alpha v_1$ tal que $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$. Luego,

$$\langle v_2, v_1 \rangle = \langle w_2 + \alpha v_1, v_1 \rangle = \langle w_2, v_1 \rangle + \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -\frac{\langle (1,1,0), (2,1,-1) \rangle}{\langle (2,1,-1), (2,1,-1) \rangle} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-1}{2} \Rightarrow v_2 = w_2 + \alpha v_1 = (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(2, 1, -1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A continuación normalizamos los tres vectores.

- $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.
- $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ya es claro que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ es una base del plano de simetría π y w_3 es un vector director de la recta perpendicular a π.

Por la construcción hecha de B, tenemos que la simetría T respecto del plano π verifica que

- $T(u_1) = u_1$ y $T(u_2) = u_2$, al ser invariantes los vectores del plano π por la simetría con respecto a dicho plano.

- $T(u_3) = -u_3$, pues los vectores de la recta ortogonal al plano π cambian de sentido por la simetría.

En consecuencia, en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, tenemos que

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el Ejercicio 3.17.a, nos piden la matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, por lo que deberíamos seguir como ya hicimos en tal ejercicio. Por tanto, nos limitamos a dar el resultado final.

$$M(T,B_C) = C_{BB_C} M(T,B) C_{B_C B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M(T,B_C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.18

Enunciado

Determina los valores de a y b para los cuales

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & b & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a una isometría lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

Resolución

Como no se específica nada en contra, damos por hecho que A está expresada en una base B ortonormal de $\mathbb{R}^4$, es decir, $A = M(f,B)$ donde B es una base ortonormal. Entonces f será una isometría lineal si, y solo si, $A^{-1} = A^T$. Por tanto,

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & b & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + \frac{a^2}{a^2+1} & \frac{2}{5} + \frac{a}{a^2+1} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{a}{a^2+1} & \frac{1}{5} + \frac{1}{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + \frac{1}{2} & b^2 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b^2 - \frac{1}{2} & b^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{4}{5} + \frac{a^2}{a^2+1} = 1 \\ \frac{2}{5} + \frac{a}{a^2+1} = 0 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{a^2+1} = 1 \\ b^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ b^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{a^2}{a^2+1} = \frac{1}{5} \\ \frac{a}{a^2+1} = \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{a^2+1} = \frac{4}{5} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 5a^2 = a^2 + 1 \\ 5a = -2(a^2+1) \\ 5 = 4(a^2+1) \\ 2b^2 = 1 \\ 2b^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 4a^2 = 1 \\ 2a^2 + 5a + 2 = 0 \\ 1 = 4a^2 \\ 2b^2 = 1 \\ 2b^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} a^2 = \frac{1}{4} \\ 2a^2 + 5a + 2 = 0 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Puesto que

- de $a^2 = \frac{1}{4}$ tenemos que $a = \pm\frac{1}{2}$,
- de $2a^2 + 5a + 2 = 0$ tenemos que $a = -2$ o $a = \frac{-1}{2}$,
- de $b^2 = \frac{1}{2}$ tenemos que $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

y, al tenerse que satisfacer las tres ecuaciones simultáneamente, concluimos que A es la matriz asociada a una isometría lineal si, y solo si, $(a, b) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ o $(a, b) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.