El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 3.13

Enunciado

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $T(x, y, z) = (2x - z, 2z - y)$.

a) Halla la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas.

b) Halla la matriz asociada a T con respecto a la base $B_3 = \{(2, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $B_2 = \{(-2, 1), (1, -2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Comprueba el diagrama que relaciona la matriz de una aplicación respecto a diferentes bases, calculando las matrices de cambio de base en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Resolución

a) A partir de la definición de T, se tiene que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ 2z - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 0y - 1z \\ 0x - 1y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Puesto que los vectores están dados por componentes, se puede considerar que están dados en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$, según tengan tres o dos componentes. En consecuencia, la matriz de T respecto de las bases canónicas es

$$M(T, C, C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $(a, b, c)_{B_3}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B_3. Para calcular su imagen por T, basta tener en cuenta que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B_3} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_3} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2b \\ 2c \end{pmatrix},$$

donde el último vector está expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (o, equivalentemente, coincide con sus componentes). Así pues, podemos aplicar la definición de T, de donde

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B_3} = T\begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2a + b) - (2c) \\ 2(2c) - (a - 2b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 2b - 2c \\ -a + 2b + 4c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por cierto, obsérvese que

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

esto es, para hallar la imagen de un vector expresado en la base B_3 basta con hallar la imagen de cada vector de dicha base y aplicar la linealidad de T.

Ahora es necesario expresar los vectores $(4,-1)$, $(2,2)$ y $(-2,4)$ en la base B_2 y, para ello, se resuelven tres sistemas de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2\alpha_1+\beta_1=4\\ \alpha_1-2\beta_1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=-\frac{7}{3}\\ \beta_1=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}_{B_2}.$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2\alpha_2+\beta_2=2\\ \alpha_2-2\beta_2=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_2=-2\\ \beta_2=-2\end{array}\right.\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}_{B_2}.$$

$$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\alpha_3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2\alpha_3+\beta_3=-2\\ \alpha_3-2\beta_3=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_3=0\\ \beta_3=-2\end{array}\right.\Rightarrow\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}_{B_2}.$$

Finalmente,

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{B_3}=a\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}_{B_2}+b\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}_{B_2}+c\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}a-2b+0c\\-\frac{2}{3}a-2b-2c\end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{B_3}=\left(\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&-2&0\\-\frac{2}{3}&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{B_3}\right)_{B_2}.$$

De donde la matriz de T respecto de las bases B_3 de $\mathbb{R}^3$ y B_2 de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T,B_3,B_2)=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&-2&0\\-\frac{2}{3}&-2&-2\end{pmatrix}.$$

c) Según se ha visto en el apartado anterior, si $(a,b,c)_{B_3}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B_3, entonces

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{B_3}=\begin{pmatrix}2a+b\\a-2b\\2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{B_3}.$$

Ya que $(2a+b,a-2b,2c)$ está expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se concluye que la matriz de cambio de base de B_3 a canónicas es

$$M(B_3,C)=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Razonando de modo análogo, la matriz de cambio de base de B_2 a canónicas es

$$M(B_2,C)=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $M(C,B_2)=M(B_2,C)^{-1}$, para finalizar este apartado basta comprobar que $M(C,B_2)\cdot M(T,C,C)\cdot M(B_3,C)=M(T,B_3,B_2)$. En efecto,

$$M(C,B_2)\cdot M(T,C,C)\cdot M(B_3,C)=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&-2&0\\-\frac{2}{3}&-2&-2\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.17

Enunciado

Determina, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de las siguientes isometrías lineales.

d) Giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto de la recta r dada por $x = y = z$.

e) Simetría con respecto al plano π ortogonal a la recta r dada por $x = y = z$.

f) La composición de las dos anteriores.

Resolución

d) Como se quiere un giro alrededor de la recta r dada por $x = y = z$, se pueden considerar los tres siguientes vectores unitarios (esto es, con norma igual a uno) y linealmente independientes:

- u_1 vector director de la recta r,
- u_2, u_3 vectores ortogonales a la recta r y ortogonales entre sí.

Para tales vectores, el giro no afectará a u_1 (esto es, la imagen por el giro será el mismo u_1) pero sí a u_2 y u_3. Además, los vectores u_2, u_3 y sus respectivas imágenes por el giro pertenecerán al mismo plano π, siendo tal plano el ortogonal a la recta considerada.

Realizando los cálculos oportunos (¡háganse y justifíquense!) se tiene que:

- $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- El plano π ortogonal a la recta r viene dado por la ecuación $x + y + z = 0$.
- $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pertenecen al plano π pero no son ortogonales entre sí.
- Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a los dos vectores anteriores, se obtienen $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, que sí son ortogonales entre sí.

Puesto que u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes, entonces $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Sea G el giro considerado. Entonces:

- $G(u_1) = u_1 \Rightarrow G\left((1, 0, 0)_B\right) = (1, 0, 0)_B$.
- $G(u_2) = u_2 \cos(\frac{\pi}{2}) + u_3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = u_3 \Rightarrow G\left((0, 1, 0)_B\right) = (0, 0, 1)_B$.
- $G(u_3) = -u_2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + u_3 \cos(\frac{\pi}{2}) = -u_2 \Rightarrow G\left((0, 0, 1)_B\right) = (0, -1, 0)_B$.

Por tanto, la matriz de G con respecto a la base B será

$$M(G, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la matriz del giro con respecto a la base canónica es necesaria la matriz de cambio de la base B a la base canónica, esto es, la matriz

$$M(B, C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Recordando que $M(B, C)$ es ortogonal por ser la matriz de cambio de una base ortonormal, se tiene que $M(B, C)^{-1} = M(B, C)^T$. Así pues, se concluye que la matriz del giro G con respecto a la base canónica será

$$M(G, C) = M(B, C) \cdot M(G, B) \cdot M(C, B) = M(B, C) \cdot M(G, B) \cdot M(B, C)^{-1} =$$

$$M(B,C)\cdot M(G,B)\cdot M(B,C)^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M(G,C)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Es conveniente observar que, si se intercambian los vectores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (esto es, si se toman al revés), entonces el giro se realiza en sentido contrario al tomado en la resolución hecha. En consecuencia, la matriz del giro con respecto a la base canónica será la inversa de la obtenida. Por cierto, al ser $M(G,C)$ una matriz ortogonal, su transpuesta es su inversa.

e) Puesto que la recta r y el plano π son los mismos que en el apartado anterior, se puede considerar la misma base $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ hallada antes para efectuar los cálculos. En este caso, se tiene que

- la imagen de u_1 por la simetría con respecto al plano π será $-u_1$, pues u_1 es ortogonal a π;
- la imagen de u_2 y u_3 serán ellos mismos, pues ambos vectores pertenecen a π.

De esta forma, la matriz asociada a la simetría S con respecto al plano π, en la base B, será

$$M(S,B)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Para hallar la matriz de S con respecto a la base canónica se usa de nuevo la matriz de cambio $M(B,C)$ y se tiene en cuenta que $M(C,B)=M(B,C)^{-1}=M(B,C)^T$. Así,

$$M(S,C)=M(B,C)\cdot M(S,B)\cdot M(C,B)=M(B,C)\cdot M(S,B)\cdot M(B,C)^{-1}=$$

$$M(B,C)\cdot M(S,B)\cdot M(B,C)^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M(S,C)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

f) Aunque no se indica en qué orden se aplican ambas isometrías lineales, no es relevante en este caso ya que ambas conmutan. En efecto,

$$M(G\circ S,C)=M(G,C)\cdot M(S,C)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$M(S\circ G,C)=M(S,C)\cdot M(G,C)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

y, en ambos casos, el resultado es el mismo:

$$M(G\circ S,C)=M(S\circ G,C)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}.$$