Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 3 (T1)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 1 (tema 3): ejercicio obligatorio (curso 2020–2021)

Enunciado

Se considera la aplicación, entre los espacios vectoriales reales usuales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$,

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y + z, x - y + z, 0).$$

a) A partir de la definición de aplicación lineal, justifica que T es lineal.

b) Halla una base, ecuaciones cartesianas y ecuaciones paramétricas del núcleo de T.

c) Halla una base, ecuaciones cartesianas y ecuaciones paramétricas de la imagen de T.

d) Determina el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es $(1, 3, 2, 0)$.

En los apartados b, c y d, deben justificarse todos los cálculos realizados.

Resolución

a) Para comprobar que T es una aplicación lineal debemos ver que se verifican las dos condiciones siguientes:

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$, para cualesquiera vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para cualquier vector $u \in \mathbb{R}^3$ y cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideremos $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$T(u + v) = T\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$$

$$((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), 0) =$$

$$(x_1 + 2y_1, 2x_1 + y_1 + z_1, x_1 - y_1 + z_1, 0) + (x_2 + 2y_2, 2x_2 + y_2 + z_2, x_2 - y_2 + z_2, 0) =$$

$$T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(u) + T(v).$$

Por otra parte, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\lambda u) = T\left(\lambda(x, y, z)\right) = T\left((\lambda x, \lambda y, \lambda z)\right) =$$

$$((\lambda x) + 2(\lambda y), 2(\lambda x) + (\lambda y) + (\lambda z), (\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z), 0) =$$

$$\lambda(x + 2y, 2x + y + z, x - y + z, 0) = \lambda T(x, y, z) = \lambda T(u).$$

b) A partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal, tenemos que

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 2y, 2x + y + z, x - y + z, 0) = (0, 0, 0, 0)\right\}.$$

Por tanto, los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenecen a $\mathrm{N}(T)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Resolvamos este sistema aplicando eliminación gaussiana a la matriz ampliada asociada[1]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, tenemos que

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + \tfrac{2}{3}z = 0,\ y - \tfrac{1}{3}z = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\tfrac{2}{3}z,\ y = \tfrac{1}{3}z\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(-\tfrac{2}{3}\lambda, \tfrac{1}{3}\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\lambda\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 1\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \{\mu\,(2, -1, -3) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, $B_1 = \{(2, -1, -3)\}$ es una base[2] de $\mathrm{N}(T)$.

Por los cálculos ya realizados, tenemos que unas ecuaciones cartesianas de $\mathrm{N}(T)$ son

$$\left.\begin{aligned} x + \tfrac{2}{3}z &= 0 \\ y - \tfrac{1}{3}z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 2z &= 0 \\ 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Y unas ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\mu \\ y &= -\mu \\ z &= -3\mu \end{aligned}\right\},\ \text{con } \mu \in \mathbb{R}.$$

c) A partir de la definición de imagen de una aplicación lineal, tenemos que

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x, y, z) = (a, b, c, d) \text{ para algún } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (x + 2y, 2x + y + z, x - y + z, 0) = (a, b, c, d)\right\}.$$

Por tanto, los vectores $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ que pertenecen a $\mathrm{Im}(T)$ son aquellos tales que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= a \\ 2x + y + z &= b \\ x - y + z &= c \\ 0 &= d \end{aligned}\right\}.$$

Estudiamos este sistema aplicando eliminación gaussiana a la matriz ampliada asociada[3]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1 & b - 2a \\ 0 & -3 & 1 & c - a \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & a - b + c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right).$$

[1] Determínense las transformaciones elementales hechas en cada paso.

[2] Hemos visto que todos los vectores de $\mathrm{N}(T)$ son múltiplos del vector $(2, -1, -3)$, por lo que B_1 es un sistema de generadores de $\mathrm{N}(T)$. Por otro lado, un conjunto formado por un vector no nulo es siempre un conjunto de vectores linealmente independientes. En consecuencia, B_1 es una base de $\mathrm{N}(T)$.

[3] Determínense las transformaciones elementales hechas en cada paso.

Así, tenemos que

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b+c=0,\ d=0\right\}.$$

Por tanto, unas ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Im}(T)$ son

$$\left.\begin{array}{r} a-b+c=0 \\ d=0 \end{array}\right\}.$$

Para hallar una base y unas ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$, pasamos a resolver el sistema dado por sus ecuaciones cartesianas. En este caso, el sistema es bastante simple y es fácil comprobar que sus soluciones son

$$\left.\begin{array}{l} a=\lambda \\ b=\mu \\ c=-\lambda+\mu \\ d=0 \end{array}\right\}, \text{ con } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Así, hemos obtenido unas ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Im}(T)$. Ahora bien, a partir de estas ecuaciones, todos los vectores de $\mathrm{Im}(T)$ vienen dados por

$$(a,b,c,d) = (\lambda,\mu,-\lambda+\mu,0) = \lambda(1,0,-1,0) + \mu(0,1,1,0), \text{ con } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $B_2 = \{(1,0,-1,0),(0,1,1,0)\}$ es una base[4] de $\mathrm{Im}(T)$.

d) A partir de lo hecho en el apartado **c)** (concretamente, por la última matriz de la página 2), tenemos que los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es $(1,3,2,0)$ son, justamente, las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ -3y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}.$$

Despejando x, z en función de y, tenemos que

$$A = \{(1-2\alpha, \alpha, 1+3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que son origen de $(1,3,2,0)$.

[4] Hemos visto que todos los vectores de $\mathrm{Im}(T)$ se pueden obtener como combinación lineal de los vectores $(1,0,-1,0)$ y $(0,1,1,0)$, por lo que B_2 es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(T)$. Por otro lado, B_2 es claramente un conjunto formado por vectores linealmente independientes (ya que ninguno de los dos es múltiplo del otro). En consecuencia, B_2 es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Tarea 1 (tema 3): ejercicio optativo (curso 2020–2021)

Enunciado

Halla, justificadamente, un ejemplo de un endomorfismo T, en el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^4$, tal que el núcleo y la imagen de T sean el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Resolución

Es sabido que, si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es un endomorfismo, entonces $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y, además, $\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$. Por tanto, si queremos que $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$, entonces es necesario que $\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Consideremos el subespacio vectorial U, de $\mathbb{R}^4$, generado por los vectores $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$. Como estos vectores son claramente linealmente independientes[5], podemos afirmar que U tiene dimensión dos.

Definamos, a partir de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, el endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ siguiente:

$$T(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0),\ T(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0),\ T(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0),\ T(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0).$$

Por la linealidad de T, tenemos que

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1T(1, 0, 0, 0) + x_2T(0, 1, 0, 0) + x_3T(0, 0, 1, 0) + x_4T(0, 0, 0, 1) =$$

$$x_1(0, 0, 0, 0) + x_2(0, 0, 0, 0) + x_3(1, 0, 0, 0) + x_4(0, 1, 0, 0) = (x_3, x_4, 0, 0).$$

Como es fácil de comprobar[6], el endomorfismo T de $\mathbb{R}^4$ definido por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, 0, 0)$ verifica que $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T) = U$, siendo $U = L(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\})$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

[5] Basta observar que forman parte de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
[6] ¡Hágase!