Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 3 (T2)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 2 (tema 3) (curso 2020–2021)

Enunciado

En el espacio vectorial real euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, se consideran

- el plano vectorial π dado por la ecuación cartesiana $4x - 3z = 0$,
- la recta vectorial r definida por el vector $v = (1, 1, 1)$.

Siendo T la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano π, y justificando todos los cálculos que se realicen,

1) halla la matriz asociada a T en la base canónica (de $\mathbb{R}^3$);

2) halla las ecuaciones paramétricas de la recta $s = T(r)$ (esto es, la recta s es la imagen de la recta r por la simetría T).

Resolución

1) Para hallar la matriz buscada, empezamos determinando una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ con u_1, u_2 pertenecientes a π y u_3 perpendicular a π. Es claro que la simetría T verificará que $T(u_1) = u_1$, $T(u_2) = u_2$ y $T(u_3) = u_3$, puesto que todos los vectores de π no cambian por T y, por otra parte, todos los vectores ortogonales a π cambiaran de sentido por T.

Para encontrar $u_1, u_2 \in \pi$, resolvemos la ecuación cartesiana que lo define:

$$4x - 3z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{4}\alpha, \\ y = \beta, \\ z = \alpha, \end{array} \right. \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda, \\ y = \mu, \\ z = 4\lambda, \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Así, todos los vectores de π son de la forma $(3\lambda, \mu, 4\lambda)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$(3\lambda, \mu, 4\lambda) = \lambda(3, 0, 4) + \mu(0, 1, 0), \text{ para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

esto es, $\{(3, 0, 4), (0, 1, 0)\}$ es un sistema de generadores de π. Además, como ambos vectores son linealmente independientes (pues ninguno de los dos es múltiplo del otro), podemos afirmar que $\{(3, 0, 4), (0, 1, 0)\}$ es una base de π.

Para encontrar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a π, es suficiente con exigir que (x, y, z) sea ortogonal a los dos vectores de la base de π.[1]

$$\left. \begin{array}{r} \langle (x, y, z), (3, 0, 4) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3x + 4z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (4, 0, -3).^2$$

[1] En efecto, si (x, y, z) es ortogonal a $(3, 0, 4)$ y $(0, 1, 0)$, entonces

$$\langle (x, y, z), (3\lambda, \mu, 4\lambda) \rangle = \lambda \langle (x, y, z), (3, 0, 4) \rangle + \mu \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 0 + 0 = 0,$$

es decir, (x, y, z) es ortogonal a todos los vectores de π.

[2] Podríamos tomar cualquier vector nu nulo múltiplo de $(4, 0, -3)$.

Por lo comentado al inicio, la expresión de T en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B .$$

Por tanto, la matriz asociada a T con respecto a la base B es

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Para hallar la matriz de T en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$, tendremos en cuenta que la matriz de cambio de base de B a C es[3]

$$M(B,C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Además, su inversa será la matriz de cambio de C a B,[4]

$$M(C,B) = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{25} & 0 & -\frac{3}{25} \end{pmatrix} .$$

Determinemos ahora la matriz asociada a T con respecto aC. Para ello, consideramos un vector cualquiera $(x, y, z)_C$ expresado en la base C y lo expresamos en la base B,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \left(M(C,B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C \right)_B = \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{4x-3z}{25} \end{pmatrix}_B .$$

Entonces calculamos la imagen (en la base B) del último vector (que está dado en la base B),

$$T\begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{4x-3z}{25} \end{pmatrix}_B = M(T,B) \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{4x-3z}{25} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{4x-3z}{25} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{-4x+3z}{25} \end{pmatrix}_B .$$

Finalmente, expresamos la imagen en la base C,

$$\begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{-4x+3z}{25} \end{pmatrix}_B = \left(M(B,C) \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{-4x+3z}{25} \end{pmatrix}_B \right)_C = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3x+4z}{25} \\ y \\ \frac{-4x+3z}{25} \end{pmatrix}_B \right)_C = \begin{pmatrix} \frac{-7x+24z}{25} \\ y \\ \frac{24x+7z}{25} \end{pmatrix}_C .$$

Resumiendo,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} \frac{-7x+24z}{25} \\ y \\ \frac{24x+7z}{25} \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C ,$$

de donde concluimos que la matriz asociada a T con respecto a la base C es

$$M(T,C) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix} .$$

[3] Justifíquese que, efectivamente, esta es la matriz de cambio de B a C.

[4] Compruébese que, efectivamente, $M(C,B)$ es la inversa de $M(B,C)$.

2) Para hallar la transformada de la recta r por T, calculamos la imagen de su vector director v. En efecto, el vector

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}-\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}\frac{17}{25}\\1\\\frac{31}{25}\end{pmatrix}_C$$

será el vector director de la recta $s = T(r)$ y, por consiguiente, sus ecuaciones paramétricas vendrán dadas por

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{17}{25}\lambda,\\ y = \lambda,\\ z = \frac{31}{25}\lambda, \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si se prefiere, se pueden considerar paramétricas sin cocientes. Para ello, puesto que $(17, 25, 31)$ es también un vector director de s, entonces otras parámetricas de s serán

$$\left\{\begin{array}{l} x = 17\lambda,\\ y = 25\lambda,\\ z = 31\lambda, \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$