Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – **Curso: 2022–2023**

Ejercicios desarrollados - Tema 5(1)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Observación: en los ejercicios resueltos a continuación, y salvo que se diga lo contrario, la función ϕ será la usual. Esto es, si $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ son dos puntos del espacio afín considerado, entonces $\overrightarrow{PQ} = \phi(P, Q) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$.

Ejercicio 5.1

Enunciado

Se considera el espacio afín $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$ con

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

a) Prueba que el subconjunto $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1,\ x_2 = -1\}$ es un subespacio afín.[1]

b) Determina el subespacio vectorial asociado a $\mathcal{L}$ y la dimensión de $\mathcal{L}$.

Resolución

a) Para comprobar que $\mathcal{L}$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ podemos tomar dos caminos.

I) Ver que $\mathcal{L}$ satisface las condiciones para ser un espacio afín tomando como espacio vectorial real cierto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

II) Ver que $\mathcal{L}$ es una variedad afín de $\mathcal{A}$ que pasa por un cierto punto $P \in \mathcal{L}$ y que tiene por subespacio director a cierto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

En ambos casos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ será $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 0\}$. Obsérvese que las ecuaciones cartesianas que definen a U son las ecuaciones homogéneas asociadas a las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{L}$.

Veamos como razonar en cada camino.

I) Sean $P = (1, -1, a)$, $Q = (1, -1, b)$ y $R = (1, -1, c)$ tres puntos cualesquiera de $\mathcal{L}$; además, sea $v = (0, 0, \alpha)$ un vector cualquiera de U.

1. Sea $P' = (1, -1, a') \in \mathcal{L}$ tal que y $\overrightarrow{PP'} = v$. Entonces

$$(0, 0, \alpha) = (1, -1, a') - (1, -1, a) = (0, 0, a' - a) \to a' = a + \alpha.$$

Por tanto, $P' = (1, -1, a + \alpha)$ es el único punto de $\mathcal{L}$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$.

2. Veamos si se verifica que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (0, 0, b - a) + (0, 0, c - b) = (0, 0, c - a) = \overrightarrow{PR}.$$

Por tanto, $\mathcal{L}$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}_3$.

[1]Subespacio afín y variedad afín son dos nombres para un mismo concepto.

II) Es claro que

$$\mathcal{L} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1,\ x_2 = -1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix},\quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},\quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \,\Big|\lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

de donde $\mathcal{L} = P + U$ para $P = (1,-1,0)$. Por tanto, $\mathcal{L}$ es una variedad afín de $\mathcal{A}_3$.

b) Por lo hecho en el apartado anterior, el subespacio vectorial asociado a $\mathcal{L}$ es la recta vectorial $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 0\}$. Por tanto, $\dim \mathcal{L} = 1$.

Ejercicio 5.2

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$ se considera el conjunto de puntos

$$\{P_0 = (2,-1,1); P_1 = (3,2,0); P_2 = (3,2,-1); P_3 = (3,1,-1)\}.$$

a) Prueba que $\left\{P_0; \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}\right\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$.

b) Calcula las coordenadas de $X = (3,5,2)$ respecto de dicho sistema de referencia.

Resolución

a) Para ver que $\left\{P_0; \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}\right\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$ basta comprobar que $B = \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, pues (por el enunciado) sabemos que $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}$. En particular, el origen del sistema de referencia es $P_0 \in \mathcal{A}$.

Es claro que $B = \{(1,3,-1), (1,3,-2), (1,2,-2)\}$. Veamos que los tres vectores de B son linealmente independientes, para lo que estudiamos el rango de la matriz que forman.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el rango es igual a tres, los tres vectores dados son linealmentes independientes, por lo que B es una base de $\mathbb{R}^3$ y, en consecuencia, $\mathcal{R} = \{P_0; B\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3, \phi)$

b) Para calcular las coordenadas de $X = (3,5,2)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ dado en el apartado anterior, recordamos que tales coordenadas son, justamente, las coordenadas del vector $\overrightarrow{P_0X}$ en la base B. Por tanto, basta expresar $\overrightarrow{P_0X} = (1,6,1)$ como combinación lineal de los vectores $(1,3,-1), (1,3,-2)$ y $(1,2,-2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 3\alpha + 3\beta + 2\gamma = 6 \\ -\alpha - 2\beta - 2\gamma = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Por tanto las coordenadas del punto $X = (3,5,2)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ son $(3,1,-3)$.

Ejercicio 5.6

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$, el punto $O' \in \mathcal{A}_2$ de coordenadas $(2,1)$ respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ y los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2$ que respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tienen coordenadas $(1,3)$ y $(2,4)$, respectivamente.

a) Comprueba que $\mathcal{R}' = \{O'; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$.

b) Determina las coordenadas de O respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

c) Determina las coordenadas de P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ sabiendo que las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son $(3,-1)$.

d) Determina, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$, las ecuaciones paramétricas de la recta r que respecto de $\mathcal{R}$ tiene por expresión $2x - y = 1$.

Resolución

a) Puesto que $O' \in \mathcal{A}_2$, para ver que $\mathcal{R}' = \{O'; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\}$ es un sistema de referencia de $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ basta con comprobar que $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de V_2. Ahora bien, como $\vec{v}_1 = (1,3)_B$ y $\vec{v}_2 = (2,4)_B$ son dos vectores de V_2 linealmente independientes (cualquiera de los dos no es múltiplo del otro) y $\dim V_2 = 2$, es claro B' es una base de V_2. Consecuentemente, $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia de $\mathcal{A}_2$.

b) A partir del enunciado, sabemos que $O' = (2,1)_{\mathcal{R}}$. Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{OO'} = (2,1)_B$.

Por otra parte, como nos piden las coordenadas de O en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, necesitamos hallar las coordenadas de $\overrightarrow{O'O}$ en la base B'. Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'} = (-2,-1)_B$, solo tenemos que expresar $(-2,-1)_B$ en la base B'.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta = -2 \\ 3\alpha + 4\beta = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto las coordenadas del punto O en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son $\left(3, \frac{-5}{2}\right)$.

c) Que las coordenadas de P sean $(3,-1)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ se debe a que el vector $\overrightarrow{OP}$ tiene esas coordenadas en la base B.[2]

Por otra parte, como nos piden las coordenadas de P en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, lo que necesitamos hallar son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base B'.

Como también conocemos las coordenadas del punto O' en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ (esto es, conocemos las coordenadas del vector $\overrightarrow{OO'}$ en la base B), entonces

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP} = -(2,1)_B + (3,-1)_B = (1,-2)_B.$$

Ahora, para expresar $(1,-2)_B$ en la base B':

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 4\beta = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son $\left(-4, \frac{5}{2}\right)$.

---

[2] Usando notación: $P = (3,-1)_{\mathcal{R}}$ se debe a que $\overrightarrow{OP} = (3,-1)_B$.

d) Vamos a resolver este apartado de dos modos distintos.

*d*1) Empezamos hallando el cambio de sistemas de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y, a continuación, lo aplicamos sobre la ecuación cartesiana de la recta r.

*d*2) Empezamos considerando la expresión de un punto cualquiera de la recta r en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y hallamos su expresión en el sistema $\mathcal{R}'$ para, a continuación, determinar la expresión de r en $\mathcal{R}'$.

*d*1) Sea un punto cualquiera $P \in \mathcal{A}_2$ con coordenadas (x, y) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y coordenadas (x', y') en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.[3] Ahora veamos la relación entre (x, y) y (x', y'), es decir, determinemos el cambio de sistema de referencia entre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en el apartado anterior, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OP} = (x, y)_B$ y $\overrightarrow{O'P} = (x', y')'_B$,

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP} = -(2, 1)_B + (x, y)_B = (x - 2, y - 1)_B = (x', y')'_B.$$

Ahora, para expresar $(x - 2, y - 1)_B$ en la base B':

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x' + 2y' = x - 2 \\ 3x' + 4y' = y - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-2 \\ 3 & 4 & y-1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-2 \\ 0 & -2 & y-3x+5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y-2x+3 \\ 0 & -2 & y-3x+5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y-2x+3 \\ 0 & 1 & \frac{3x-y-5}{2} \end{array} \right).$$

Por tanto las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

$$(x', y') = \left(-2x + y + 3, \frac{3x - y - 5}{2} \right).$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + 3 \\ \frac{3x-y-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos así el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Pero necesitamos el de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, por lo que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $x = x' + 2y' + 2$, $y = 3x' + 4y' + 1$, de donde la recta r, que respecto de $\mathcal{R}$ tiene a $2x - y = 1$ como ecuación cartesiana, pasa a tener la ecuación cartesiana

$$2(x' + 2y' + 2) - (3x' + 4y' + 1) = 1 \Rightarrow -x' + 3 = 1 \Rightarrow x' = 2.$$

respecto de $\mathcal{R}'$. Como nos piden las paramétricas, basta con resolver el sistema dado por la cartesiana, de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2, \\ y' = \alpha, \end{array} \right. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

[3]Usando notación: $P = (x, y)_{\mathcal{R}} = (x', y')_{\mathcal{R}'}$.

$d2$) Sea P un punto cualquiera de la recta r. Entonces, a partir de la ecuación cartesiana $2x-y=1$ de r en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, sabemos que $P=(\lambda,2\lambda-1)$ con $\lambda\in\mathbb{R}$ y, por tanto, $\overrightarrow{OP}=(\lambda,2\lambda-1)_B$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. A partir de aquí,

$$\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP}=-(2,1)_B+(\lambda,2\lambda-1)_B=(\lambda-2,2\lambda-2)_B,$$

que necesitamos expresar en la base B'. Para ello, de modo similar a lo hecho en $d1$),

$$\begin{pmatrix}\lambda-2\\2\lambda-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\alpha+2\beta=\lambda-2\\3\alpha+4\beta=2\lambda-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&\lambda-2\\3&4&2\lambda-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&2&\lambda-2\\0&-2&-\lambda+4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&-2&-\lambda+4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&\frac{-\lambda+4}{2}\end{array}\right).$$

A partir de aquí, las ecuaciones paramétricas de r en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

$$\left\{\begin{array}{l}x'=2,\\y'=\frac{-\lambda+4}{2},\end{array}\right.\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},$$

las cuales son equivalentes a las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l}x'=2,\\y'=\alpha,\end{array}\right.\quad\forall\alpha\in\mathbb{R},$$

ya que los conjuntos $M_1=\left\{\frac{-\lambda+4}{2}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ y $M_2=\{\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$ son ambos iguales al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Ejercicio 5.10

Enunciado

Sea $\mathcal{R}=\{O;B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\}$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}_2$. Sean las rectas r y s de ecuaciones cartesianas, respecto de $\mathcal{R}$, $x+y=1$ y $x-y=1$, respectivamente.

Halla el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}_2$ respecto del cual las ecuaciones cartesianas de r y s son $y'=0$ y $x'=0$, respectivamente.

Resolución

Para resolver este ejercicio vamos a partir del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Con dicho cambio pasaremos de la expresión de las rectas en $\mathcal{R}$ a la expresión en $\mathcal{R}'$ y es de esperar que, imponiendo que las expresiones son conocidas en ambos sistemas, obtengamos todos los parámetros del cambio buscado. Finalmente, a partir del cambio, podremos determinar los elementos del sistema $\mathcal{R}'$.

Por tanto, considerando el cambio de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ general

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix},$$

tenemos que, sustituyendo en las expresiones de las rectas,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax'+by'+e\\cx'+dy'+f\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}r\equiv x+y=1\\s\equiv x-y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}r\equiv(ax'+by'+e)+(cx'+dy'+f)=1\\s\equiv(ax'+by'+e)-(cx'+dy'+f)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}r\equiv(a+c)x'+(b+d)y'+(e+f)=1\\s\equiv(a-c)x'+(b-d)y'+(e-f)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}r\equiv(a+c)x'+(b+d)y'=1-(e+f)\\s\equiv(a-c)x'+(b-d)y'=1-(e-f)\end{array}\right\}.$$

Ahora bien, como queremos que $r\equiv y'=0$ y que $s\equiv x'=0$, entonces es necesario que[4] $a+c=0$, $b+d=1$, $e+f=1$, $a-c=1$, $b-d=0$ y $e-f=1$. Por tanto $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{-1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=1$ y

[4] Se podría resolver el ejercicio imponiendo que $a+c=0$, $b+d\neq0$, $e+f=1$, $a-c\neq0$, $b-d=0$ y $e-f=1$, lo que daría lugar a las rectas $r\equiv y'=0$ y $s\equiv x'=0$ tras una oportuna simplificación. En este caso obtendríamos toda una familia de posibles cambios de sistema de referencia. Es decir, podemos considerar que existe toda una familia de sistemas de referencia $\mathcal{R}'$ que son compatibles con las condiciones del enunciado.

$f = 1$. Por tanto, concluimos que el cambio pedido es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Es interesante observar que el punto $P = r \cap s$ tiene coordenadas $(1, 0)$ en el sistema $\mathcal{R}$ y coordenadas $(0, 0)$ en el sistema $\mathcal{R}'$. Por supuesto, ambos pares de coordenadas son coherentes con el cambio de sistema de referencia hallado.

Para determinar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, a partir del cambio (4.1), tenemos que el origen de coordenadas de $\mathcal{R}'$ viene dado por $O' = (0, 0)_{\mathcal{R}'} = (1, 0)_{\mathcal{R}}$. En cuanto a la base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, a partir de lo visto en teoría, las columnas de la matriz de (4.1) son precisamente los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ de la base B' expresados en la base B, esto es, $\vec{u}_1 = (1, 0)_{B'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)_B$ y $\vec{u}_2 = (0, 1)_{B'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_B$.

Ejercicio 5.11.c

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$, se consideran las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{4}, \quad r_2 \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = z.$$

a) Determina la posición relativa de r_1 y r_2.

b) Halla la distancia entre las rectas r_1 y r_2.

Resolución

a) Para determinar la posición relativa de r_1 y r_2 comprobaremos si se cortan en algún punto y, posteriormente estudiaremos sus vectores directores.

Para ver si se cortan en algún punto, hallamos ecuaciones cartesianas de ambas.

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 1 = 2(y+1) \\ 4(x-1) = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ 2x - z = 2 \end{array}\right\}.$$

$$r_2 \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -(x-3) = 4(y+1) \\ x - 3 = 4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y = -1 \\ x - 4z = 3 \end{array}\right\}.$$

Ahora analizamos el sistema formado por las cuatro ecuaciones halladas.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ 2x - z = 2 \\ x + 4y = -1 \\ x - 4z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -4 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{array}\right).$$

A partir de la cuarta fila, concluimos que el sistema es incompatible y, por tanto, r_1 y r_2 no se cortan.

Para comprobar si r_1 y r_2 son paralelas o no, basta con observar que los vectores $v_1 = (2, 1, 4)$ y $v_2 = (4, -1, 1)$ (vectores directores de r_1 y r_2 respectivamente) son linealmente independientes. Por tanto, r_1 y r_2 no son paralelas.

Por todo lo visto, podemos decir que r_1 y r_2 son dos rectas, del espacio afín $\mathcal{A}_3$, que se cruzan.

b) Para hallar la distancia entre r_1 y r_2, consideraremos un punto P de r_1 y calcularemos su distancia al plano π que contiene a la recta r_2 y es paralelo a la recta r_1.

Como punto P podemos tomar $(1,-1,0)$. Para hallar el plano π lo haremos a partir de un punto Q de r_2 (por ejemplo, $(3,-1,0)$) y los vectores $v_1=(2,1,4)$ y $v_2=(4,-1,1)$ (vectores directores de r_1 y r_2 respectivamente). Entonces cualquier punto (x,y,z) pertenecerá a π si verifica que $(x,y,z)=(3,-1,0)+\alpha(2,1,4)+\beta(4,-1,1)$ y, a partir de esta igualdad,

$$\left.\begin{array}{c} x=3+2\alpha+4\beta \\ y=-1+\alpha-\beta \\ z=4\alpha+\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2\alpha+4\beta=x-3 \\ \alpha-\beta=y+1 \\ 4\alpha+\beta=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x-3 \\ 1 & -1 & y+1 \\ 4 & 1 & z \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y+1 \\ 2 & 4 & x-3 \\ 4 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y+1 \\ 0 & 6 & x-2y-5 \\ 0 & 5 & z-4y-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y+1 \\ 0 & 6 & x-2y-5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6}x-\frac{14}{6}y+z+\frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Por tanto, π viene dado por la ecuación cartesiana $-\frac{5}{6}x-\frac{14}{6}y+z+\frac{1}{6}=0$ o, equivalentemente, por la ecuación $5x+14y-6z-1=0$.

Ahora, para hallar la distancia de $P=(1,-1,0)$ al plano $\pi\equiv 5x+14y-6z-1=0$, buscamos la recta s perpendicular a π que pasa por P.

Como s tiene que ser perpendicular a π, tomamos como vector director de s al vector $u=(5,14,-6)$ (que claramente es ortogonal a los vectores v_1 y v_2, que sirvieron para hallar la cartesiana de π). Como s pasa por P, entonces cualquier punto (x,y,z) de s es de la forma $(x,y,z)=(1,-1,0)+\lambda(5,14,-6)$ y, a partir de esta igualdad,

$$\left.\begin{array}{c} x=1+5\lambda \\ y=-1+14\lambda \\ z=-6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 5\lambda=x-1 \\ 14\lambda=y+1 \\ -6\lambda=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 5 & x-1 \\ 14 & y+1 \\ -6 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 5 & x-1 \\ 0 & -\frac{14}{5}x+y+\frac{19}{5} \\ 0 & \frac{6}{5}x+z-\frac{6}{5} \end{array}\right).$$

Por tanto, s viene dada por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{c} 14x-5y-19=0 \\ 6x+5z-6=0 \end{array}\right\}.$$

Como la distancia entre r_1 y r_2 es igual a la distancia entre r_1 y π que, a su vez, es la distancia entre P y $Q=s\cap\pi$, procedemos a calcular Q resolviendo el sistema formado por las ecuaciones cartesianas de s y π.

$$\left.\begin{array}{c} 14x-5y-19=0 \\ 6x+5z-6=0 \\ 5x+14y-6z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 14x-5y=19 \\ 6x+5z=6 \\ 5x+14y-6z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{307}{257},\frac{-117}{257},\frac{-60}{257}\right).$$

Por tanto, $\mathrm{d}(r_1,r_2)=\mathrm{d}(P,Q)=\|\overrightarrow{PQ}\|=\left\|\left(\frac{50}{257},\frac{140}{257},\frac{-60}{257}\right)\right\|=\frac{10\sqrt{257}}{257}$.

Ejercicio 5.12

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3,V_3,\phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R}=\{O;B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\}$, se considera la recta

$$r\equiv X=P+\lambda\vec{u}\ \equiv\ \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u},$$

donde P tiene coordenadas $(1,0,2)$ respecto de $\mathcal{R}$ y $\vec{u}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

a) Determina la ecuación general del plano que pertenece al haz de planos que contiene a la recta r.

b) Determina la ecuación cartesiana del plano del haz anterior que es paralelo a la recta $r=O+L(\{\vec{e}_1\})$; esto es, r es la recta que contiene al punto O y tiene por subespacio vectorial asociado al generado por el vector $\vec{e}_1$.

c) Determina la ecuación paramétrica del plano γ que corta a la recta $s = O + L(\{\vec{e}_1\})$ en el punto $(1, 0, 0)$, siendo γ un plano del haz anterior.

Resolución

a) Recordemos que un *haz de planos (secantes)* es el conjunto infinito de planos que tienen en común a una recta dada.[5]

A partir del enunciado, la recta r que define al haz de planos pedido es la que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y tiene a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ como vector director. Por tanto, r vendrá dada por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = 2 - \lambda, \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estudiando las ecuaciones paramétricas tomando a λ como incógnita y a x, y, z como parámetros, deduciremos ecuaciones cartesianas de r. En efecto,

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda = x - 1 \\ 3\lambda = y \\ \lambda = 2 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 2 & x-1 \\ 3 & y \\ 1 & 2-z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2-z \\ 3 & y \\ 2 & x-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2-z \\ 0 & y+3z-6 \\ 0 & x+2z-5 \end{array}\right).$$

Por tanto, para que el sistema (con λ como incógnita) sea compatible es necesario que

$$\left.\begin{array}{r} y + 3z - 6 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{array}\right\},$$

y estas son, precisamente, ecuaciones cartesianas de r.

Ahora bien, tanto $y + 3z - 6 = 0$ como $x + 2z - 5 = 0$ son ecuaciones cartesianas de dos planos que contienen a r. Por tanto, el haz de planos que contiene a r está dado por la expresión

$$\alpha(y + 3z - 6) + \beta(x + 2z - 5) = 0, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

También se puede considerar la expresión[6]

$$(y + 3z - 6) + \rho(x + 2z - 5) = 0, \text{ con } \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

b) En este apartado nos piden un plano π que ha de verificar las dos condiciones siguientes:

- pertenecer al haz de planos determinado por la recta r que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y tiene a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ como vector director;
- ser paralelo a la recta r que pasa por el punto $O = (0, 0, 0)$ y tiene a $\vec{u} = (1, 0, 0)$ como vector director.

Por tanto, π ha de pasar por $P = (1, 0, 2)$ y ha de tener a $(2, 3, -1)$ y $(1, 0, 0)$ como vectores directores. En consecuencia, π vendrá dado por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu, \\ y = 3\lambda, \\ z = 2 - \lambda, \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ahora, para determinar una cartesiana de π, estudiamos el sistema formado por las paramétricas tomando a λ, μ como incógnitas y a x, y, z como parámetros.

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda + \mu = x - 1 \\ 3\lambda = y \\ \lambda = 2 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 0 & 2-z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 3 & 0 & y \\ 2 & 1 & x-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 0 & 0 & y+3z-6 \\ 0 & 1 & x+2z-5 \end{array}\right).$$

[5] También se puede hablar del *haz de planos paralelos*, esto es, el conjunto de planos que son todos paralelos entre sí.

[6] Conviene comentar que, en la expresión (4.2), cada plano del haz de planos viene dado por infinitas posibles parejas de valores (α, β). Sin embargo, en la expresión (4.3), cada plano viene dado por un único valor de ρ, pero siempre que sea un plano distinto de $x + 2z - 5 = 0$. Justamente, el plano $x + 2z - 5 = 0$ no se obtiene en (4.3) para ningún valor de ρ.

Por tanto, para que el sistema (con λ, μ como incógnitas) sea compatible es necesario que

$$y + 3z - 6 = 0,$$

que es una ecuación cartesiana de π.

c) En este apartado nos piden un plano γ que ha de verificar las dos condiciones siguientes:

- pertenecer al haz de planos determinado por la recta r que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y tiene a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ como vector director;
- pasar por el punto $Q = (1, 0, 0)$.

Veamos dos maneras de responder a la pregunta planteada. En la primera, imponemos en (4.2) que el punto $(1, 0, 0)$ ha de pertenecer al plano buscado.

$$\alpha(0 + 3 \cdot 0 - 6) + \beta(1 + 2 \cdot 0 - 5) = 0 \Rightarrow -6\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}\alpha.$$

Tomando $\alpha = -2$, entonces $\beta = 3$ y, por tanto,

$$-2(y + 3z - 6) + 3(x + 2z - 5) = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 3 = 0,$$

siendo esta última una ecuación cartesiana del plano γ. Para obtener la expresión paramétrica, bastará con resolver esta ecuación cartesiana.

$$3x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3x - 3}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = \frac{3\lambda - 3}{2}, \\ z = \mu, \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = \left(\lambda, \frac{3\lambda - 3}{2}, \mu\right), \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Para el segundo modo de responder, debemos observar que, al pertenecer los puntos $P = (1, 0, 2)$ y $Q = (1, 0, 0)$ al plano γ, entonces el vector $\overrightarrow{QP} = (1, 0, 2) - (1, 0, 0) = (0, 0, 2)$ es un vector director de γ. En consecuencia, como $(2, 3, -1)$ es también un vector director de γ, este vendrá dado por las ecuaciones paramétricas[7]

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = 2 - \lambda + 2\mu, \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O, equivalentemente,

$$(x, y, z) = (1 + 2\lambda, 3\lambda, 2 - \lambda + 2\mu), \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Aunque pueda parecer que las expresiones (4.4) y (4.5) representan a planos distintos, en realidad son dos expresiones equivalentes de γ. Para confirmar que esto es cierto, determinemos una cartesiana de γ a partir de las ecuaciones paramétricas obtenidas con el segundo razonamiento. Como siempre, estudiamos el sistema formado por las paramétricas tomando a λ, μ como incógnitas y a x, y, z como parámetros.

$$\left. \begin{array}{r} 2\lambda = x - 1 \\ 3\lambda = y \\ \lambda - 2\mu = 2 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x - 1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -2 & 2 - z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 - z \\ 3 & 0 & y \\ 2 & 0 & x - 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 - z \\ 0 & 6 & y + 3z - 6 \\ 0 & 4 & x + 2z - 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 - z \\ 0 & 6 & y + 3z - 6 \\ 0 & 12 & 3x + 6z - 15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 - z \\ 0 & 6 & y + 3z - 6 \\ 0 & 0 & 3x - 2y - 3 \end{array}\right).$$

[7]Para definir las paramétricas se puede escoger tanto a P como a Q. Aquí elegiremos a P, pero puede ser muy instructivo repetir los cálculos tomando Q. Por supuesto, el resultado final ha de ser el mismo (es decir, las ecuaciones obtenidas serán las mismas o equivalentes)

Finalmente, el sistema será compatible siempre que

$$3x - 2y - 3 = 0,$$

que es la misma ecuación cartesiana de γ obtenida en la primera forma de responder a este apartado. Por consiguiente, podemos asegurar que (4.4) y (4.5) son dos representaciones (en paramétricas) equivalentes del plano γ.

Ejercicio 5.13

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$ usual, se definen las aplicaciones afines

- $T(x, y) = (x + 7, -y - 2)$,
- el giro G de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del punto $(2, 2)$,
- $H = G \circ T$.

Responde a las siguientes cuestiones.

a) Halla la expresión matricial de cada aplicación dada.

b) ¿Cuáles son isometrías afines? En los casos afirmativos, determina si son directas o inversas.

c) En cada caso de isometría afín, y cuando existan, halla la variedad afín de puntos fijos F y la variedad invariante I.

Resolución

a) Como T está dada en coordenadas, podemos dar su expresión matricial directamente:

$$T(x, y) = (x + 7, -y - 2) \Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para el giro G de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del punto $A = (2, 2)$, empezamos observando (supuesto que el giro es el sentido contrario al sentido de las agujas del reloj) que el vector $(1, 0)$ pasa a ser el vector $(0, 1)$ y el vector $(0, 1)$ pasa a ser $(-1, 0)$. Por tanto, si tomamos los puntos $P = A + (1, 0) = (3, 2)$ y $Q = A + (0, 1) = (2, 3)$, entonces

$$G(A) = G(2, 2) = (2, 2); \;\; G(3, 2) = G(A + (1, 0)) = G(A) + (0, 1) = A + (0, 1) = (2, 3);$$

$$G(2, 3) = G(A + (0, 1)) = G(A) + (-1, 0) = A + (-1, 0) = (1, 2).$$

Considerando que la expresión general de G es

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

las igualdades $G(2, 2) = (2, 2)$, $G(3, 2) = (2, 3)$, $G(2, 3) = (1, 2)$ nos permiten establecer un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas para hallar los valores de a, b, c, d, e, f. Veámoslo,

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a + 2b + e = 2 \\ 2c + 2d + f = 2 \end{array}\right\} \\[2ex] \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a + 2b + e = 2 \\ 3c + 2d + f = 3 \end{array}\right\} \\[2ex] \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a + 3b + e = 1 \\ 2c + 3d + f = 2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 2a + 2b + e = 2 \\ 3a + 2b + e = 2 \\ 2a + 3b + e = 1 \end{array}\right\} \\[2ex] \left.\begin{array}{r} 2c + 2d + f = 2 \\ 3c + 2d + f = 3 \\ 2c + 3d + f = 2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ e = 4 \\ f = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}.$$

Por último, para la expresión matricial de $H=G\circ T$, aprovechamos las de G y T. En efecto,

$$H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=G\left(T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\left(T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$

b) Ya que las tres aplicaciones afines están expresadas en un sistema de referencia rectangular, para saber si son isometrías afines basta comprobar si las matrices asociadas son ortogonales.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow T \text{ es isometría afín.}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow G \text{ es isometría afín.}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow H \text{ es isometría afín.}$$

Por cierto, por ser composición de dos isometrías afines, entonces H también tiene que ser isometría afín.

Por otra parte,

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-1\Rightarrow T \text{ es isometría afín inversa.}$$

$$\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=1\Rightarrow G \text{ es isometría afín directa.}$$

$$\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1\Rightarrow H \text{ es isometría afín inversa.}$$

c) Para hallar la posible variedad afín de puntos fijos $F(T)$,

$$T(x,y)=(x,y)\Rightarrow(x+7,-y-2)=(x,y)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+7=x\\-y-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7=0\\-2=2y\end{array}\right\},$$

por lo que T no tiene puntos fijos.

Para hallar la posible variedad invariante I de T, notando por M_T la matriz asociada a T,

$$(M_T-I_2)^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(M_T-I_2)T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\4y+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=-1.$$

Por tanto, la variedad invariante de T es la recta $y=-1$.[8]

[8] A partir del conocimiento de los puntos fijos de T y la variedad invariante $I(T)$, podemos afirmar que T es una simetría deslizante con respecto a la recta $r\equiv y=-1$. Para determinar el vector v de la traslación de la simetría deslizante, tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos su transformado por T,

$$T(0,-1)=(7,-1)\Rightarrow v=\overrightarrow{PT(P)}=(7,-1)-(0,-1)=(7,0).$$

Como era de esperar, $(7,0)$ es un vector paralelo a la recta r.

Para hallar la posible variedad afín de puntos fijos $F(G)$,

$$G(x,y)=(x,y)\Rightarrow(-y+4,x)=(x,y)\Rightarrow \left.\begin{matrix}-y+4=x\\ x=y\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+y=4\\ x-y=0\end{matrix}\right\},$$

por lo que el único punto fijo de G es $(2,2)$.

Para hallar la posible variedad invariante I de G, notando por M_G la matriz asociada a G,

$$(M_G-I_2)^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(M_G-I_2)G\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1\\ 1&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1\\ 1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&2\\ -2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2y-4\\ -2x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x=y=2.$$

Por tanto, la variedad invariante de G es justamente el punto fijo $(2,2)$.[9]

Para hallar la posible variedad afín de puntos fijos $F(H)$,

$$H(x,y)=(x,y)\Rightarrow(y+6,x+7)=(x,y)\Rightarrow \left.\begin{matrix}y+6=x\\ x+7=y\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x-y=6\\ x-y=-7\end{matrix}\right\},$$

por lo que H no tiene puntos fijos.

Para hallar la posible variedad invariante $I(H)$, notando por M_H la matriz asociada a H,

$$(M_H-I_2)^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(M_H-I_2)H\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\ 1&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\ 1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2&-2\\ -2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-2y+1\\ -2x+2y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow 2x-2y=-1.$$

Por tanto, la variedad invariante de H es la recta $2x-2y=-1$.[10]

Ejercicio 5.14

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3,V_3,\phi)$, con el sistema de referencia $\mathcal{R}=\{O;B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2\}\}$ usual, se define la isometría afín $T_1(x,y,z)=(x,z-1,-y+3)$. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Clasifica T_1.

b) Halla las ecuaciones de la simetría S_π respecto del plano $\pi\equiv y-z+1=0$.

c) ¿Existe una isometría afín T_2 tal que $T_1=T_2\circ S_\pi$?

Resolución

[9] El único punto fijo de G y la variedad invariante $I(G)$ estaban claros pues el enunciado establecía que G es un giro de centro el punto $(2,2)$.

[10] A partir del conocimiento de los puntos fijos de H y la variedad invariante $I(H)$, podemos afirmar que H es una simetría deslizante con respecto a la recta $r\equiv 2x-2y=-1$. Para determinar el vector v de la traslación de la simetría deslizante, tomamos un punto P cualquiera de r y calculamos su transformado por H,

$$H\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{13}{2},7\right)\Rightarrow v=\overrightarrow{PH(P)}=\left(\frac{13}{2},7\right)-\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{13}{2},\frac{13}{2}\right).$$

Como siempre ocurre con las simetrías deslizantes, $\left(\frac{13}{2},\frac{13}{2}\right)$ es un vector paralelo a la recta r.

a) Para clasificar la isometría afín T_1 vamos a estudiar sus puntos fijos y su variedad invariante.

Para los puntos fijos tenemos que

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\z-1\\-y+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=x\\z-1=y\\-y+3=z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}0=0\\y-z=-1\\y+z=3\end{array}\right\}.$$

Por tanto, la variedad de puntos fijos de T_1 es la recta afín r_1 dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases}x=\alpha,\\y=1,\quad \alpha\in\mathbb{R},\\z=2,\end{cases}$$

o, equivalentemente, la recta afín r_1 dada por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{r}y=1\\z=2\end{array}\right\}.$$

Para hallar la variedad invariante de T_1, primero determinamos su expresión matricial. Esto es,

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\z-1\\-y+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\z\\-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Si denotamos por M_1 a la matriz asociada a T_1, es fácil comprobar que $M_1M_1^T=I_3$. Por tanto, como $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia rectangular, podemos confirmar que T_1 es una isometría afín en el espacio afín $\mathcal{A}_3$. Además, como $\det M_1=1$, entonces T_1 es una isometría afín directa.

Ahora, a partir de la ecuación de las variedades invariantes de una aplicación afín,

$$(M_1-I_3)^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(M_1-I_3)T_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}0=0\\-2z+4=0\\2y-2=0\end{array}\right\}.$$

Por tanto, la variedad invariante de T_1 es precisamente la variedad de puntos fijos.

Por lo ya visto, concluimos que T_1 es un giro alrededor de la recta r_1 (es decir, la recta de puntos fijos).[11]

b) Para hallar la simetría respecto del plano $\pi\equiv y-z+1=0$ vamos a considerar un punto cualquiera $P=(a,b,c)$ que no pertenezca a π. Tras calcular la recta r perpendicular a π que pasa por P, tenemos que $Q=r\cap\pi$ es justamente el punto medio del segmento determinado por los puntos P y $S_\pi(P)$. Hagamos los cálculos.

Como $A_1=(0,-1,0)$, $A_2=(1,-1,0)$ y $A_3=(0,0,1)$ son puntos de π, tenemos que $\overrightarrow{A_1A_2}=(1,0,0)$ y $\overrightarrow{A_1A_3}=(0,1,1)$ son dos vectores directores de π. Por tanto, $v=(0,1,-1)$ es un vector director de cualquier recta r perpendicular a π. Si, además, queremos que r pase por P, entonces

$$\begin{cases}x=a,\\y=b+\lambda,\quad\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\\z=c-\lambda,\end{cases}\left.\begin{array}{r}x=a\\y-b=c-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=a\\y+z=b+c\end{array}\right\}.$$

[11] Si quisiéramos determinar el ángulo del giro podemos seguir el siguiente procedimiento: tras calcular un plano π_1 perpendicular a la recta r_1, consideramos el punto $P=r_1\cap\pi_1$ y otro punto cualquiera Q de π_1; entonces el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PT_1(Q)}$ (yendo de $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PT_1(Q)}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj) es el ángulo buscado. Para T_1 se comprueba que el ángulo es igual a $\frac{3\pi}{2}$.

Ahora hallamos $Q = r \cap \pi$ (a partir de las ecuaciones cartesianas de r y de π).

$$\left.\begin{array}{c} x = a \\ y + z = b + c \\ y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = a \\ y = \frac{b+c-1}{2} \\ z = \frac{b+c+1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b+c-1}{2} \\ \frac{b+c+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\frac{P + S_\pi(P)}{2} = Q \Rightarrow P + S_\pi(P) = 2Q \Rightarrow (a, b, c) + S_\pi(P) = 2\left(a, \frac{b+c-1}{2}, \frac{b+c+1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$S_\pi(P) = (2a, b + c - 1, b + c + 1) - (a, b, c) \Rightarrow S_\pi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c - 1 \\ b + 1 \end{pmatrix}.$$

Y, usando (x, y, z) en lugar de (a, b, c),

$$S_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}.$$

c) Al ser S_π una simetría con respecto a un plano, es claro que $S_\pi \circ S_\pi$ es la identidad en $\mathcal{A}_3$ (que es también una isometría afín). Por tanto, si T_2 existiera debería cumplirse que

$$T_1 = T_2 \circ S_\pi \Rightarrow T_1 \circ S_\pi = (T_2 \circ S_\pi) \circ S_\pi = T_2 \circ (S_\pi \circ S_\pi) \Rightarrow T_1 \circ S_\pi = T_2.$$

Como la composición de isometrías afines es otra isometría afín, tenemos que existe una isometría afín T_2 tal que $T_1 = T_2 \circ S_\pi$. De hecho, $T_2 = T_1 \circ S_\pi$.